ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

1er Cycle

COLLECTION

Sciences **E**xactes **P**hysique

MS. MAALEM

MECANIQUE DES FLUIDES

Troncs communs: SNV, Biologie, STA et SETI.
(lire le verso du livre)

2000

EXERCICES CORRIGES
AVEC
RAPPEL DE COURS

2000

Tome 1

Etude des liquides

L'hydrostatique, l'hydrodynamique et les solutions binaires

n.s

2° Edition

طبع المؤسسة الوطنية للفنون المطبعية
وحدة الرغاية ، الجزائر

2000

Printed in Algeria.

ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

1er Cycle

collection

Sciences Exactes Physique

MS. MAALEM

(chargé de cours à l'université des sciences et de la technologie d'Alger)
(USTHB)

MECANIQUE DES FLUIDES

Exercices corrigés avec rappel de cours

Mecanique des fluide, exercice corrigé

Tome I

fluide

Etude des liquides

L'hydrostatique, l'hydrodynamique et les solutions binaires

m.m.s

2ème Edition

ISBN: 9961 - 929 - 08 - X

Dépôt légal: 965 - 98

PREFACE

Ce manuel, de par son contenu et sa présentation, s'adresse indistinctement aux étudiants des troncs communs des universités et des grandes écoles. Il peut également être bénéfique aux élèves des cycles courts de techniciens supérieurs.

Un rappel consistant des principales notions de cours précède chaque série d'exercices dont le corrigé est largement commenté.

Le choix des exercices proposés est des plus judicieux; toutes les parties du cours sont illustrées.

Les clarifications apportées, tant au niveau du cours que dans les corrigés, sont d'une utilité certaine pour l'étudiant.

La qualité pédagogique du manuel mérite d'être signalée. Ce manuel est, en quelque sorte, l'aboutissement d'une expérience accumulée pendant plus d'une vingtaine d'années d'enseignement par monsieur MS. MAALEM.

Mustapha BOUHADEF (*)

(*) Mustapha BOUHADEF est professeur, responsable de l'équipe de recherche en énergétique et mécanique des fluides à l' institut de physique de l' U S T H B . Il a assumé les responsabilités principales suivantes:

- -- Directeur du laboratoire de mécanique des fluides .
- -- Directeur du centre de recherche en énergies nouvelles (CRENO) .
- -- Recteur de l' U S T H B .
- -- Président du conseil scientifique de l'institut de physique de l'USTHB.

Avant propos

Ce livre, conforme au nouveau programme de l'enseignement supérieur (1998), s'adresse essentiellement aux étudiants des troncs communs: de biologie (**TC-Biologie**) et des sciences de la nature et de la vie (**TC-SNV**). De par son contenu et de par l'approche utilisée, il peut également servir aux étudiants des troncs communs **SETI** (**S**ciences **E**xactes, **T**echnologie et **I**nformatique) et **STA** (**S**sciences de la **T**erre et de l'**A**gronomie), ainsi qu'aux élèves des cycles de formation de techniciens supérieurs.

L'objectif visé étant l'étude de l'état liquide, ce livre est intitulé volontairement **"Mécanique des fluides"** même si la partie sur les solutions binaires relève plutôt de la thermodynamique.

Dans cette 2ème édition, sur la demande des étudiants, la partie **"Rappel de cours"** a été approfondie. Quant à la partie **"Exercices"** elle a été mise à jour et enrichie de la série d'exercices, avec réponses, utilisée dans les universités de Bab Ezzouar (USTHB), de Blida, de Tizi ouzou et dans les CBM (centre biomédical) de Dargana (Alger) et de Tizi ouzou. On a aussi rajouté une partie **recueil d'épreuves d'examens récents**.

Sur le plan pédagogique, ce livre constitue le fruit de plus de deux décennies d'expérience dans l'enseignement supérieur.

Cet ouvrage n'est pas seulement un manuel d'exercices: au début de chaque partie, une large place est réservée à un rappel consistant de cours, comportant toutes les notions fondamentales. Les démonstrations, omises volontairement dans la partie cours, sont traitées et commentées dans les exercices.

Les exercices proposés, se veulent avant tout, un complément indispensable au cours. Leur mission est à la fois d'illustrer et de compléter le cours. Ils ont été choisis de manière à ce qu'ils soient dans la chronologie du cours. Ainsi, l'étudiant pourra utiliser ce livre de manière progressive au cours de son année d'étude. Par souci pédagogique, les exercices ont été extraits ou inspirés des épreuves d'examens.

..../....

Les solutions proposées sont détaillées et comportent de larges commentaires faisant le lien avec le cours expliquant, ainsi, certains de ses points délicats.

Les exercices avec réponses ont été insérés, dans cette édition, pour servir de test d'assimilation à l'étudiant. Quant au recueil d'épreuves d'examens récents, il lui servira de se préparer aux examens.

Enfin, le livre est rédigé dans le style journalistique, familier aux étudiants.

J'espère que cet ouvrage sera apprécié par mes collègues et les étudiants et je serais très heureux de recevoir leurs critiques et suggestions.

L'auteur

SOMMAIRE

1ère PARTIE

HYDROSTATIQUE

2ème PARTIE

HYDRODYNAMIQUE

Le programme officiel (1998) de physique des troncs communs, de biomédical et de biologie, est donné à la fin du livre.

SIGNIFICATION DES ABREVIATIONS UTILISEES DANS LE FASCICULE

U S T H B : Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene, sise à Alger.

CFPM : Centre de formation paramédicale: section des techniciens supérieurs en biologie, en anatomie pathologique et en cytologie

S F I P : Service de formation de l'institut Pasteur: section des techniciens supérieurs en analyses médicales

CHU : Centre hospitalo universitaire

P 0 0 4 : Module de physique des sciences biologiques

PB1 : Nouvelle appellation du module de physique des sciences biologiques

T C S N : Module du tronc commun des sciences de la nature

E L D : Epreuve de longue durée (2h.)

E SYNT : Epreuve de synthèse (2 à 3h.)

E RATT : Epreuve de rattrapage (2 à 3h.)

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

- **Paterson A:** First course in fluid mechanics Cambridge university presse 1983.

- **ROLF H. SABERSKY**
ALLAN J. ACOSTA
EDWARD G. HAUPTMANN:
Fluid Flow: A first course in fluid mechanics - 2°Edition - Macmillan

- **Regis Joulie**: Mécanique des fluides appliquée - Ellipses.

- **Zeytounian, R**: Mécanique des fluides fondamentale, Springer, lecture notes in physics 1991.

- **Y. Doucet**: Technique moderne et application de la cryomètrie - Dunod.

- **G. Charlot**: Les réactions chimiques en solution - Masson (1969).

RAPPEL DE COURS

GÉNÉRALITÉS

Forces d'interaction moléculaire

La matière est constituée par des atomes. Souvent, ces atomes se regroupent pour former des molécules dont les dimensions sont de l'ordre de quelques Å . Les molécules se regroupent également entre elles, sous l'action des forces dites: **forces d'interaction moléculaire**, pour former des groupements moléculaire appelés corps ou matière. La loi de la force d'interaction moléculaire est de la forme.

$$\boxed{\left\| \overrightarrow{f_{ij}} \right\| = \frac{A}{r_{ij}^{7}}}$$

où: A est une constante qui dépend du type de molécules (ou d'atomes) considérés et r_{ij} la distance moyenne qui sépare les molécules (ou les atomes) n°i et n°j.

Etats de la matière

- Au delà d'une distance $R_0 \approx 100$ (Å) environ, l'action moléculaire est quasiment nulle. Selon que r_{ij} est très faible devant R_0 , légèrement inférieure à R_0 ou supérieure à R_0 , la matière considérée est dite: **solide, liquide** ou **gaz.**

- Dans les **solides**, les forces d'interaction moléculaire sont très importantes. De ce fait, les molécules ne peuvent pas se déplacer les unes par rapport aux autres; c'est pour cela, qu'ils gardent leurs formes.

- Dans les **liquides**, les forces d'interaction moléculaire sont faibles; néanmoins, elles assurent aux molécules une certaine cohésion. Contrairement aux solides, les molécules peuvent se mouvoir les unes par rapport aux autres; c'est pour cela, qu'ils prennent la forme des récipients qui les contiennent.

- Dans les **gaz**, en dehors des chocs entre molécules, les forces d'interaction moléculaire sont négligeables. Le mouvement des molécules est parfaitement désordonné (mouvement **Brownien**).

- Les **liquides** et les **gaz** sont appelés **fluides.**

Statique des fluides

La statique des fluides est la science qui traite des fluides en équilibre. Quand le fluide est un liquide, elle est dite **hydrostatique**.

Équilibre d'un fluide

Un fluide est en équilibre, lorsque tous ses points matériels restent dans la même position au cours du temps.

Point matériel d'un fluide

Il faut entendre par point matériel d'un fluide, un élément de volume de ce fluide, considéré comme un milieu continu; il ne s'agit donc pas de molécule ou d'atome. Un point matériel d'un fluide peut comporter plusieurs molécules.

Forces mises en jeu dans un fluide

Les forces qui interviennent dans l'équilibre d'un fluide sont: les forces de volume (force de pesanteur) et de surface (forces de pression et de tension superficielle).

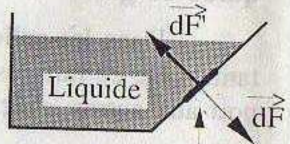
HYDROSTATIQUE

Dans un premier temps, on négligera les forces de tension superficielle; c'est à dire que les **éléments liquides** sont soumis aux seules forces de **pesanteur et de pression**.

Notion de pression

On appelle pression P en un point M d'un liquide, le rapport de l'intensité de la force $\overrightarrow{dF}$ que le liquide exerce sur l'une des faces d'une surface matérielle (ou fictive) dS, placée en M, par son aire dS.

Sur la Fig(1), le liquide renfermé par le récipient est en équilibre. Si on considère l'élément de surface dS de la face inclinée, la force $\overrightarrow{dF}$ exercée par le liquide est égale et opposée à celle $\overrightarrow{dF'}$ exercée par la paroi sur le liquide (principe de l'action et de la réaction). Comme le liquide est au repos, l'action de la paroi sur le liquide est forcément perpendiculaire à la paroi (si elle était inclinée, sa composante tangentielle entraînerait le mouvement du fluide le long de cette paroi). Il s'en suit alors que $\overrightarrow{dF}$ est également perpendiculaire à la surface dS.



Fig(1)

$$\overrightarrow{dF} + \overrightarrow{dF'} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{dF} = -\overrightarrow{dF'}$$

Comme le résultat précédent est valable pour toute les faces du récipient, on peut dire, en conclusion, que les forces de pression s'exercent toujours perpendiculairement aux surfaces des récipients qui les contiennent

$$\underset{(P)}{P} = \frac{\|\overrightarrow{dF}\| \ (N)}{dS \ (m^2)}$$

Dans le système international (MKSA), la pression s'exprime en Pascal, en abrégé (P). Souvent, on l'exprime aussi en atmosphère, en abrégé (atm); 1 (atm)=10^5 (P) et en bar; 1 (bar) est environ égal à 1 (atm).

Lois de l'hydrostatique

1° Loi: en chaque point M d'un liquide en équilibre, il y a une pression P; l'intensité de la force de pression exercée par le liquide sur une surface matérielle dS, placée en ce point M, ne dépend pas de son orientation .

2° Loi: Dans un liquide en équilibre et au repos, par rapport au sol, la pression reste constante en tout point de ce même liquide, appartenant au même plan horizontal.

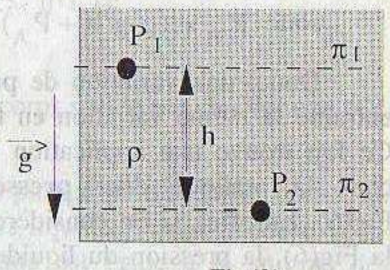
Il s'en suit que les surfaces isobares (même pression) d'un liquide en équilibre et au repos sont planes, parallèles et horizontales.

3° Loi: dite loi fondamentale de l'hydrostatique.

Dans un liquide en équilibre et au repos, par rapport au sol, la pression augmente avec la profondeur selon la loi ci-après:

$$\boxed{P_2 - P_1 = \rho g h}$$

P_1 et P_2 sont les pressions du liquide sur les plans π_1 et π_2 Fig(2). Quant à ρ, g et h, ils représentent, respectivement, la masse volumique du liquide, l'accélération de la pesanteur et la dénivellation entre les plans horizontaux π_1 et π_2.



Fig(2)

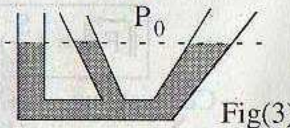
Remarque: à partir de l'équation d'équilibre d'un cylindre, vertical et fictif de liquide, dont les surfaces de bases sont situées sur les plans π_1 et π_2 , on établit (Cf. Sol. Ex. n°1.1 et 1.2) la loi précédente.

Application des lois de l'hydrostatique

Principe des vases communicants

Les surfaces libres d'un même liquide, au repos et supportant la même pression, sont contenues dans un même plan horizontal Fig(3).

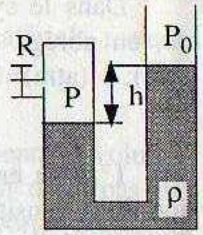
Remarque: Si les surfaces libres d'un même liquide, au repos et se trouvant à l'intérieur de deux vases communicants, ne sont pas dans un même plan horizontal, il en résulte que les pressions qu'elles supportent sont différentes Fig(4). Les pres-



Fig(3)

sions P et P_0 sont alors reliées par (Cf. Ex. n°1.3):

$$P - P_0 = \rho g h$$



Fig(4)

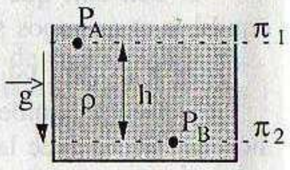
Presse hydraulique

Le principe de la presse hydraulique est basé sur le théorème de Pascal.

- Enoncé du théorème de Pascal: Toute variation de pression, en un point d'un liquide en équilibre, entraîne la même variation en tous ses points.

- Démonstration: Considérons les points A et B du liquide, au repos et en équilibre de la Fig(5). La loi qui lie les pressions en ces points est:

$$P_B - P_A = \rho g h$$



Fig(5)

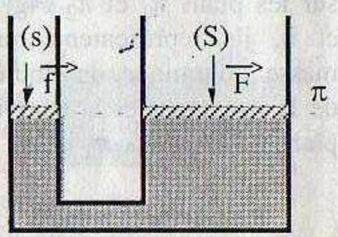
Si en A la pression varie dune quantité égale à p, la pression en B sera de P'_B telle que:

$$P'_B - (P_A + p) = \rho g h$$

soit: $P'_B = (\rho g h + P_A) + p = P_B + p$

Donc, une variation de pression en un point d'un liquide en équilibre entraîne la même variation en tous ses points.

Ce fait trouve une application très importante dans la pratique dite: **presse hydraulique** Fig(6). En effet, si on considère le système de la Fig(6), la pression du liquide en tout point, appartenant au plan horizontal π, est la même. Si on néglige les poids des disques qui reposent sur les surfaces libres du liquide, cette pression P vaut:



Fig(6)

$$P = \frac{\|\vec{f}\|}{s} = \frac{\|\vec{F}\|}{S}$$

où: $\vec{f}$ et $\vec{F}$ sont les forces appliquées aux disques pour les maintenir dans un même plan horizontal (π sur la Fig(6)).

La force $\vec{F}$ qui équilibre la force $\vec{f}$ est donc reliée à cette dernière par:

$$\boxed{\|\vec{F}\| = \left(\frac{S}{s}\right) \|\vec{f}\|}$$

Ce système, qui permet de multiplier l'intensité de la force $\vec{f}$ par le rapport $\frac{S}{s}$, est appelé presse hydraulique (Cf. Ex. n°1.4 et 1.5).

Principe d'Archiméde - Flottabilité

Principe d'Archiméde

Comme la pression d'un liquide croît avec la profondeur, les forces de pression exercées par un liquide sur un corps, se trouvant dans ce liquide, sont plus importantes en profondeur. Il s'en suit que la résultante des forces élémentaires de pression, s'exerçant sur ce corps, est dirigée vers le haut (Cf. Ex. n°1.6). D'où l'énoncé du principe d'Archiméde:

Énoncé: tout corps solide plongé dans un liquide subit de la part de celui-ci une force $\vec{\pi}$, appelée poussée d'Archiméde, égale et opposée au poids du volume du liquide qu'il a déplacé.

Flottabilité

Du fait de la poussée d'Archimède, certains corps peuvent flotter dans des liquides. En effet, si la masse volumique moyenne ρ_0 du corps solide est inférieure à celle ρ du liquide dans lequel il est plongé, son poids $\vec{P}$ sera équilibré par la poussée d'Archimède $\vec{\pi}$ avant qu'il ne soit complètement immergé. D'où la condition de flottabilité (Cf. Ex. n°1.7):

$$\boxed{\rho_0 \leq \rho}$$

ρ_0 étant le rapport de la masse totale du corps solide par son volume (Cf. Ex. n°1.7). (cas d'un bateau)

Remarque: lorsque un corps solide est plongé partiellement dans plusieurs liquide, il sera soumis, de la part de ces liquides, à une poussée verticale, dirigée de bas en haut et dont l'intensité est égale à la somme des poids des volumes de liquides déplacés (Cf. Ex. n°1.9).

Masse volumique d'un échantillon

Les masses volumiques de certains échantillons solides dont on ne sait pas calculer les volumes se déterminent, dans la pratique, comme suit:

- En les plongeant dans un liquide, ils déplacent un volume de liquide égal au leur (V). On a alors:

$$V = \Delta V_{liquide}$$

Par pesée, on peut déterminer leur masse m. D'où leur masse volumique ρ .

$$\rho = \frac{m}{\Delta V_{liquide}}$$

Mesure de pression (Baromètre et manomètre)

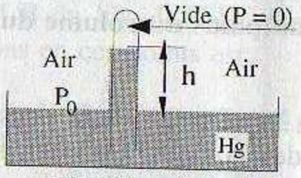
Les lois de l'hydrostatique sont également utilisées pour mesurer les pressions des fluides. Les appareils qui permettent ces mesures sont appelés **Baromètres**, quant il s'agit de l'air atmosphérique, et **manomètres** pour les autres fluides.

Remarque: Dans la pratique il existe des appareils qui mesurent les pressions des fluides (liquides et gaz), appelés également manomètres qui n'utilisent pas, dans leur principe, les lois de l'hydrostatiaque.

Les Fig(7 et 8) donnent, à titre d'illustration, les principes d'un baromètre et d'un manomètre différentiel.

La mesure de h permet de déterminer la pression atmosphérique P_0. En effet la loi fondamentale de l'hydrostatique s'écrit dans ce cas:

$$P_0 - P = \rho g h$$



Fig(7) réservoir

Comme la pression P est nulle (vide), la pression P_0 vaut:

$$P_0 = \rho g h$$

Il suffit donc de graduer le tube en pression (puisque ρ et g sont constants) pour pouvoir lire à tout instant la valeur de la pression atmosphérique P_0.

Remarque: Dans la pratique, on utilise souvent du mercure dans les baromètres pour sa masse volumique élevée (pour avoir de faibles dénivellations h) et pour sa mouillabilité envers le verre (Cf. § phénomènes de capillarité), qui permet de faire une bonne lecture de h, donc de P_0.

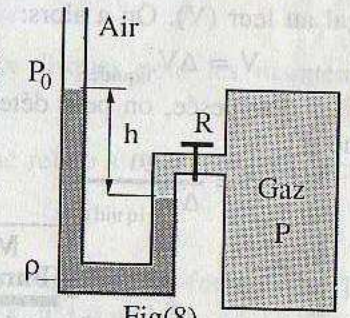
En reliant la sortie d'un réservoir de gaz à un tube en U Fig(8), renfermant un liquide de masse volumique ρ, les surfaces libres du liquide seront soumises à des pressions différentes (P_0 et P). Il s'en suit alors une dénivellation h des surfaces de liquide telle que:

$$P - P_0 = \rho g h$$

La mesure de h et la connaissance de P_0 permet de déterminer la pression P du gaz; soit:

$$P = P_0 + \rho g h$$

Remarque: Dans la pratique, le volume de gaz qui rentre dans le tube en U est négligeable devant celui du réservoir. De ce fait, on peut considérer que les pressions du gaz avant et après la mesure sont égales.



Fig(8)

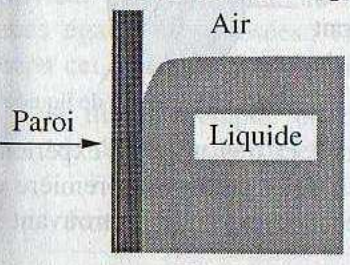
Envisageons maintenant le cas où les forces de tension superficielle ne sont pas négligeables

TENSION SUPERFICIELLE - PHENOMENE DE CAPILLARITÉ

Force de tension superficielle

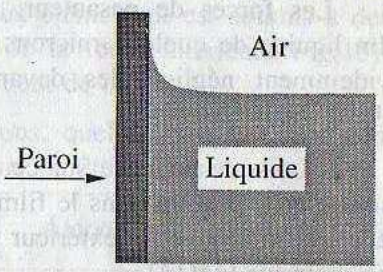
Phénomène de surface

Précédemment, on a vu que la surface libre d'un liquide, au repos et en équilibre, est plane et horizontale. Si on l'examine de très près, on s'aperçoit que celle-ci s'incurve près des parois Fig(9 et 10). Un tel phénomène s'appelle phénomène de surface et les forces qui en sont responsables s'appellent **"forces de tension superficielle"**.



Fig(9)

ou

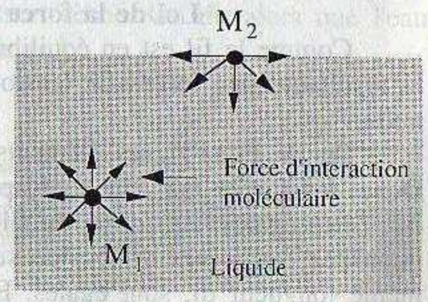


Fig(10)

D'autres phénomènes tels que l'ascension des liquides dans les tubes capillaires ou le long des fibres de coton, la formation des gouttes et des bulles de liquides sont également expliqués par les forces de tension superficielle, appelées aussi forces de capillarité.

Origine des forces de tension superficielle

Considérons les molécules M_1 et M_2 d'un même liquide en équilibre Fig(12). La résultante des forces d'interaction moléculaire s'exerçant sur M_1 est forcément nulle, alors que celle s'exerçant sur M_2 est dirigée vers l'intérieur du liquide. En effet, comme M_1 est entourée de molécules identiques et de façon symétrique; leurs actions sur M_1 s'annulent deux à deux. Il s'en suit alors une résultante nulle des actions moléculaires. Quant à la molécule M_2, qui se trouve sur la surface du liquide, elle n'est soumise qu'à la moitié des actions moléculaires de M_1 (Les molécules symétrique par rapport à M_2



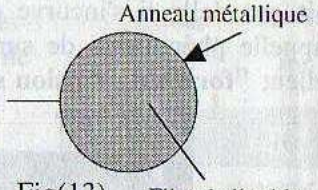
Fig(12)

n'existent plus). La résultante des actions moléculaires n'est donc pas nulle et est dirigée vers l'intérieur du liquide.

En conclusion, on peut dire que sur la surface d'un liquide en équilibre s'exerce des forces dites: de tension superficielle, d'origine moléculaire, qui tendent à ramasser le liquide (c'est à dire à diminuer sa surface); c'est ainsi qu'on explique la formation des gouttes de liquide, par exemple.

Mise en évidence de la force de tension superficielle.

Considérons un film très mince de liquide, retiré, au moyen d'un anneau de fil de fer, dans un récipient contenant de l'eau savonneuse par exemple, Fig(13).

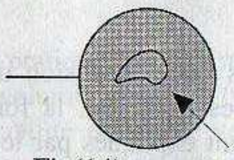


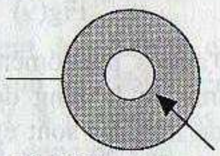
Fig(13)

Les forces de pesanteur, s'exerçant sur le film liquide de quelque microns d'épaisseur, sont évidemment négligeables devant les forces de tension superficielle.

- Lorsque on pose sur ce film un fil, noué et très mince, l'expérience montre qu'il pénètre dans le film et le divise en deux parties: la première est celle qui se trouve à l'extérieur du fil et la seconde est celle se trouvant en son intérieur Fig(14).

- Quand on supprime, au moyen d'une aiguille, le liquide se trouvant à l'intérieur du fil, le fil prend la forme d'un cercle parfait Fig(15).


Fig(14) Fil noué


Fig(15) Fil noué

Le fil est tendu par des forces dirigées vers l'intérieur du liquide. Donc, par les forces de tension superficielle.

Loi de la force de tension superficielle.

Comme le fil est en équilibre sur les Fig(13 et 14), cela veut dire que la résultante des forces de tension superficielle qui lui sont appliquées est nulle.

Sur la Fig(15), les éléments dl du fil sont symétriques deux à deux. Donc, les forces qui leur sont appliquées sont forcément opposées et leurs intensités égales. La forme du fil étant circulaire, on peut conclure que les intensités des forces de tension superficielle, s'exerçant sur des éléments de même longueur dl, sont égales. Elles ne dépendent donc que du liquide et de la longueur de l'élément dl considéré; d'où la loi de force des forces de

tension superficielle:

$$\boxed{\|\overrightarrow{dF}\| = A\ dl}$$

La force de tension superficielle $\overrightarrow{dF}$ est perpendiculaire à l'élément dl (car sa droite d'action passe par le centre du cercle) et est dirigée vers l'intérieur du liquide.

La constante de proportionnalité A est appelée constante de tension superficielle du liquide; elle s'exprime en (N/m) et dépend: de la nature du liquide, de sa température et du gaz avec lequel il est en contact.

On comprend alors pourquoi, dans le cas de la Fig(14), le fil est rentré dans le liquide sans le déformer: dans ce cas, il y a du liquide aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du fil. Donc chaque élément dl est soumis à deux forces égales et opposées.; la suppression de la force intérieure Fig(15) a rompu cet équilibre et a entraîné le déplacement de dl.

A titre d'exemple, on donne, ci-dessous, quelques valeurs des constantes de tension superficielle à la température de 20°C dans l'air.

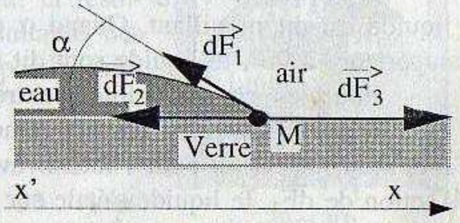
Nature du liquide	Eau	Alcool	Mercure
A (N/m)	$72\ 10^{-3}$	$22\ 10^{-3}$	$450\ 10^{-3}$

Remarque: quand la température d'un liquide augmente, la valeur de sa constante de tension superficielle A diminue.

Contact d'un liquide avec un solide et un gaz
Mouillement

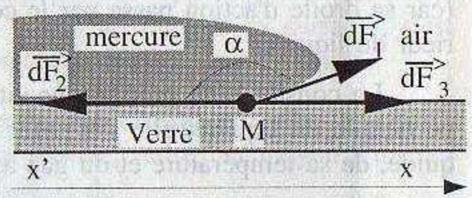
L'expérience montre que lorsque on trempe une tige en verre, bien propre, dans de l'eau, elle en sort recouverte d'une pellicule de liquide. La même tige, plongée dans du mercure, ressort sèche. On dit alors que l'eau mouille le verre et le mercure ne le mouille pas.

Pour clarifier ce phénomène, considérons une goutte de liquide sur une lame de verre propre et horizontale Fig(16 et 17). Comme le liquide s'étale ou se ramasse sur cette lame, les molécules liquide, qui sont en contact avec la lame et l'air, se sont déplacées tangentiellement à la sur-



Fig(16)

face de cette lame. Donc, tout se passe comme si ces molécules liquide (M sur les Fig(16 et 17)) étaient soumises, en plus de la force de tension superficielle ($\overrightarrow{dF_1}$ sur les Fig(16 et 17)), à deux autres forces ($\overrightarrow{dF_2}$ et $\overrightarrow{dF_3}$ sur les Fig(16 et 17)), d'origine moléculaire et agissant tangentiellement à la surface de la lame. Le phénomène de mouillement peut alors s'expliquer comme suit: quand $\overrightarrow{dF_2}$ l'emporte sur l'action **tangentielle** de $\overrightarrow{dF_3}$ et de $\overrightarrow{dF_1}$, le liquide se ramasse; il s'étalera sur la lame si $\overrightarrow{dF_3}$ l'emporte sur l'action **tangentielle** de $\overrightarrow{dF_2}$ et de $\overrightarrow{dF_1}$.



Fig(17)

L'angle α caractérise, en quelque sorte, le mouillement du liquide envers le corps solide avec lequel il est en contact. En effet, lorsque $\alpha=0$, l'épaisseur de la couche de liquide devient faible. Donc, le liquide s'est étalé sur la surface solide; c'est à dire que la force $\overrightarrow{dF_3}$ l'a emporté sur l'action tangentielle les deux autres. On dit que le liquide mouille le solide. Quand α est obtus, le liquide tend à se ramasser, cette fois-ci, c'est la force $\overrightarrow{dF_2}$ qui l'emporte sur l'action tangentielle des deux autres. On dit que le liquide ne mouille pas la surface solide avec laquelle il est en contact. Déterminons donc la valeur de l'angle α, en écrivant l'équilibre de la molécule de liquide M des Fig(16 et 17). Lorsque M est en équilibre, la somme des actions, suivant l'axe x'x, des forces $\overrightarrow{dF_1}$, $\overrightarrow{dF_2}$ et $\overrightarrow{dF_3}$, s'exerçant sur elle est nulle. On peut donc écrire:

$$(dF_3) + (-dF_2) + (-dF_1\cos(\alpha)) = 0 \qquad (1)$$

soit: $$\cos(\alpha) = \frac{dF_3 - dF_2}{dF_1} = \frac{A_3 dl - A_2 dl}{A_1 dl} = \frac{A_3 - A_2}{A_1}$$

où: A_1, A_2 et A_3 sont, respectivement, les constantes de tension superficielle du liquide quand il est en contact avec l'air, avec le solide (verre) et avec l'air et le solide à la fois.

Lorsque α est aigu; c'est à dire que sa valeurs est inférieure à 90°, le liquide est dit mouillant. Quand α est obtus; c'est à dire que sa valeurs est supérieure à 90°, le liquide sont dit non mouillant.

Pour les cas particuliers extrêmes, c'est à dire $\alpha=0°$ et $\alpha=180°$, les mouillements sont dits, respectivement, parfait et imparfait. Par exemple, le mouillement parfait peut s'obtenir avec de l'eau pure et du verre propre: sous l'action de $\overrightarrow{dF_3}$, le liquide s'étale sur la surface du verre et forme un film très mince pour lequel, les forces d'interaction moléculaire existent encore.

Action d'une paroi sur un liquide

La relation (1) montre que la valeur algébrique de force de tension superficielle $\overrightarrow{dF_{TS}}$, exercée, sur une longueur dl de la limite du liquide, par une paroi solide et le long d'elle, est:

$$dF_{TS} = dF_3 - dF_2 = dF_1\cos(\alpha)$$

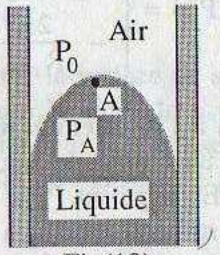
soit: $$\boxed{dF_{TS} = A_1 dl\cos(\alpha)} \qquad (2)$$

L'intensité de la force de tension superficielle est égale à la valeur absolue de dF_{TS} . Quant à son sens, il est donné par le signe de dF_{TS}: si dF_{TS} est positif, la force est dirigée dans le sens de l'étalement du liquide sur la paroi; s'il est négatif, la force est dirigée dans le sens contraire au précédent (Cf. Ex. n°1.9 et 1.10 et 1.11).

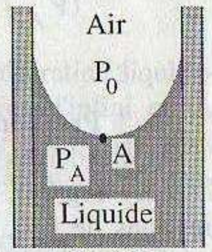
APPLICATIONS

Notion de pression complémentaire

Les tubes capillaires en verre des Fig(18 et 19) contiennent, respectivement, du mercure (liquide non mouillant) et de l'eau (liquide mouillant). La déformation de la surface libre de ces liquides, due aux forces de tension superficielle, peut se traduire par l'apparition d'une pression complémentaire P_c sous ces surfaces, dite **"pression complémentaire"**. Cette pression dépend du liquide considéré, du gaz avec lequel il est en contact et du rayon de courbure moyen R_{moy} de la surface de séparation liquide-gaz.



Fig(18)



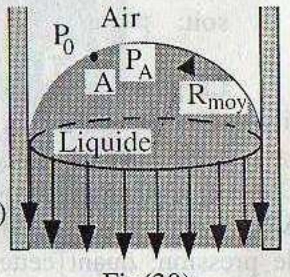
Fig(19)

Dans le cas d'une surface de forme sphérique et de rayon R_{moy} Fig(20), l'équilibre de l'enveloppe sphérique du liquide, de masse négligeable, s'écrit:

$$\overrightarrow{F_p} + \overrightarrow{F_{TS}} = \overrightarrow{0}$$

où: $\overrightarrow{F_p}$ et $\overrightarrow{F_{TS}}$ sont, respectivement, la résultante des forces de pression et la résultante des forces de tension superficielle, exercée par la paroi sur le liquide.

soit: $$(P_A - P_0)\pi R^2_{moy} - (2\pi R_{moy})A = 0 \qquad (3)$$



Fig(20)

Remarque: Sur les Fig(18, 19 et 20), A est un point intérieur de l'enveloppe liquide. D'autre part, la valeur α dans le cas de la sphère est 180°.

En remplaçant $(P_A - P_0)$ par P_c (pression complémentaire) dans l'équation (3), on obtient:

$$P_c \pi R^2_{moy} = (2\pi R_{moy})A$$

D'où l'expression de la pression complémentaire.

$$\boxed{P_c = \frac{2\,A}{R_{moy}}}$$

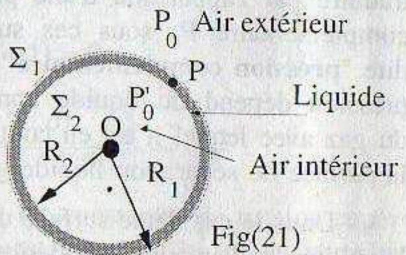
où: A est la constante de tension superficielle du liquide, quand il est en contact avec le gaz considéré. Dans le cas des Fig(18 et 19), le gaz est l'air atmosphérique.

Remarque: La variation de pression $(P_A - P_{Gaz})$ est positive lorsque le ménisque est convexe (Fig(18)) et elle est négative pour un ménisque concave Fig(19). On aura donc:

$$(P_A - P_0) = \begin{cases} +\dfrac{2A}{R_{moy}} & ,\ \text{pour un ménisque convexe} \\ -\dfrac{2A}{R_{moy}} & ,\ \text{pour un ménisque concave} \end{cases}$$

Pression à l'intérieur d'une bulle sphérique de liquide

Considérons une bulle de liquide, limitée par les surfaces sphériques Σ_1 et Σ_2 Fig(21). En appelant P_0 et P'_0 les pressions de l'air, respectivement, à l'extérieur et à l'intérieur de la bulle et P la pression à l'intérieur du liquide, on peut écrire:



Fig(21)

$$P - P_0 = \frac{2A}{R_2}$$

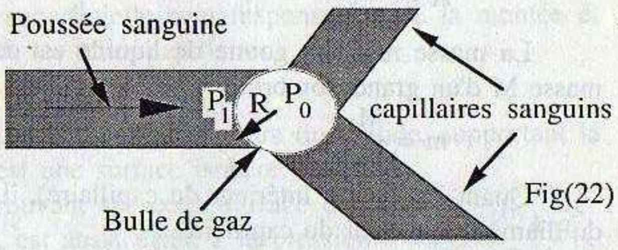
et: $$P - P'_0 = -\frac{2A}{R_1}$$

soit: $$P'_0 - P_0 = 2A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{4\,A}{R} \quad , \quad \text{car } R_1 \approx R_2 \approx R$$

La pression de l'air à l'intérieur d'une bulle de liquide est donc supérieure à celle de l'air extérieur. On comprend alors pourquoi les bulles d'eau savonneuse, par exemple, éclatent après un un certain parcours vers le haut. Comme la pression atmosphérique diminue au fur et à mesure qu'on s'élève: $\Delta P = (P'_0 - P_0)$ augmente. Il en est donc de même pour la résultante des forces de pression; quant cette dernière l'emporte sur la force de tension superficielle, la bulle éclate.

L'embolie capillaire

L'embolie capillaire survient à la suite d'une variation brusque de la pression qui s'exerce sur l'organisme humain (remontée brutale d'un plongeur d'une profondeur importante en mer, par exemple) ou lors d'une injection accidentelle de gaz dans une veine. Des bulles de gaz, susceptibles de bloquer la circulation sanguin, peuvent alors se former dans les capillaires sanguins Fig(22).



Fig(22)

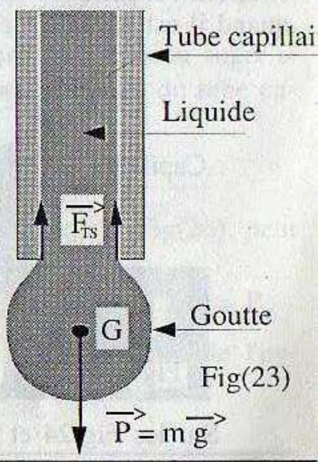
Dans une bifurcation de capillaires sanguins Fig(22), la bulle de gaz peut bloquer la circulation sanguine puisque la pression P_0 à l'intérieur de la bulle est supérieure ou égale à celle P_1 de poussée du sang, quelle que soit le rayon de courbure de la surface de séparation sang-gaz.

$$P_1 - P_0 = -\frac{2A}{R} \Rightarrow P_0 \geq P_1$$

Remarque: Sous la poussée sanguine, la surface de séparation liquide-gaz tend à s'aplatir; son rayon de courbure R tend alors vers l'infini et les pressions de poussée du sang et du gaz tendent à s'égaliser. Deux cas alors peuvent se produire: éclatement de la bulle ou blocage de la circulation sanguine.

Stalagmométrie

La stalagmométrie est la méthode de détermination des constantes de tension superficielle des liquides, au moyen d'un compte gouttes.



Fig(23)

Dans un compte gouttes Fig(23), le liquide s'écoule difficilement, dans le tube capillaire, à cause des forces de viscosité (Cf. § hydrodynamique) et de tension superficielle. Le liquide tombe goutte à goutte. Tant que le poids de la goutte est inférieure à la résultante des forces de tension superficielle, elle ne tombe pas. A la rupture d'équilibre, on a donc:

$$\|\vec{F}_{TS}\| = \|\vec{P}\| = mg$$

avec: $$\|\vec{F}_{TS}\| = 2\pi r\,A$$

D'où l'expression donnant la constante de tension superficielle A du liquide.

$$A = \frac{m\,g}{2\pi r}$$

La masse m d'une goutte de liquide est déterminée par la pesée de la masse M d'un grand nombre N de gouttes, soit:

$$m = \frac{M}{N}$$

Quant à r (rayon intérieur du capillaire), il est déterminé par la mesure du diamètre intérieur du capillaire.

Remarques:

1°- dans la pratique, on utilise, pour tous les liquides, la formule empirique suivante:

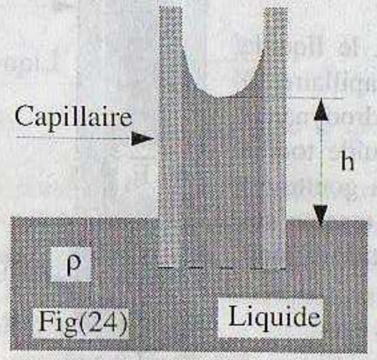
$$A = \frac{m\,g}{4\ r}$$

2°- Comme toutes les gouttes, issues d'un même compte gouttes, sont identiques, c'est à dire qu'elles ont la même masse m, les compte gouttes sont souvent utilisés dans le domaine médical pour doser certains médicaments.

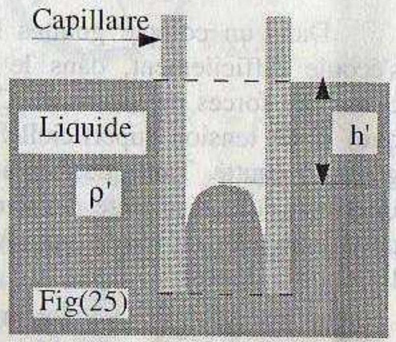
3°- Les constantes de tension superficielle des liquide, en contact avec l'air, se déterminent aussi au moyen d'appareils dits: tensiométres; les plus importants sont ceux qui utilisent la méthode de la balance (Cf. Ex. n°1.9) et celle des tubes capillaires (loi de Jurin) Cf. § ci-dessous.

Ascension des liquides dans les capillaires - Loi de Jurin

Lorsque le rayon intérieur r d'un tube capillaire est inférieur à 1 mm environ, l'expérience montre que le liquide monte (ou descend) dans ce tube, quand il est partiellement plongé dans un liquide Fig(24 et 25).



Fig(24)



Fig(25)

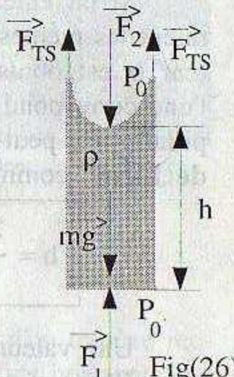
Sur les Fig(24 et 25), on peut remarquer que les liquides de masse vo-

lumique ρ et ρ' sont, respectivement, mouillant et non mouillant vis à vis du capillaire.

Les forces de tension superficielle sont responsables de la montée et de la descente du liquide dans les tubes capillaires.

Loi de Jurin

Sur la Fig(24), par exemple, la surface libre du liquide, supportant la pression atmosphérique P_0, est une surface isobare. Donc, la pression du liquide, se trouvant sur cette surface et à l'intérieur du tube capillaire, est aussi égale à la pression P_0. On peut donc écrire l'équilibre de la colonne de liquide de hauteur h du capillaire Fig(25), soit:



Fig(26)

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{TS} + m\vec{g} = \vec{0} \qquad (1)$$

où: $\|\vec{F}_1\| = (\pi\ r^2)\ P_0$, $\|\vec{F}_2\| = (\pi\ r^2)\ P_0$

$\|\vec{F}_{TS}\| = (2\pi\ r)\ A\cos(\alpha)$ et $mg = \rho\ (\pi\ r^2)\ h\ g$

A et α sont la constante de tension superficielle du liquide et sa mouillabilité envers le capillaire.

La projection de l'équation (1), sur un axe vertical, donne:

$$-(\pi\ r^2)\ P_0 + (\pi\ r^2)\ P_0 + (2\pi\ r)\ A\cos(\alpha) - \rho\ (\pi\ r^2)\ h\ g = 0$$

soit: $(2\pi\ r)\ A\cos(\alpha) - \rho\ (\pi\ r^2)\ h\ g = 0 \qquad (2)$

La hauteur d'ascension h du liquide dans le capillaire est alors égale à:

$$h = \frac{2\ A\cos(\alpha)}{\rho\ g\ r} \qquad (3)$$

Remarque 1: L'équation (2) montre que les forces de tension superficielle induisent une pression complémentaire P_{TS}, dans le liquide du tube capillaire, telle que:

$$P_{TS} = \frac{F_{TS}}{\pi\ r^2} = \rho\ g\ h$$

La loi fondamentale de l'hydrostatique, dans le cas de la Fig(26), peut alors s'écrire comme suit:

$$P_1 - (P_0 - P_{TS}) = \rho\ g\ h \ \Rightarrow\ P_1 = P_0 - P_{TS} + \rho\ g\ h = P_0$$

Compte tenu de la remarque précédente, la loi fondamentale de l'hydrostatique, dans le cas de la Fig(24), s'écrit:

$$(P_0 + P_{TS}) - P_0 = \rho'\ g\ h$$

soit: $$P_{TS} = \frac{(2\ \pi\ r)\ A \left| \cos(\alpha) \right|}{(\pi\ r^2)} = \rho'\ g\ h$$

La descente du liquide dans le tube capillaire est alors:

$$h = \frac{2\ A \left| \cos(\alpha) \right|}{\rho'\ g\ r} \qquad (4)$$

Si on enlève la valeur absolue au $\cos(\alpha)$, les relations (3) et (4) seraient les mêmes. Cependant, la valeur de h sera négative dans l'équation (4) (car α est obtus) et positive dans l'équation (3) (car α est aigu). Comme l'une correspond à l'ascension et l'autre à la descente du liquide dans le capillaire, on peut écrire une relation unique pour tous les liquides, dite **"loi de Jurin"** comme suit:

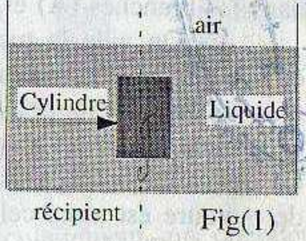
$$\boxed{h = \frac{2\ A \cos(\alpha)}{\rho\ g\ r}}$$

Une valeur positive de h correspond à une ascension du liquide dans le capillaire et une valeur négative à une descente de liquide.

La loi de Jurin permet de déterminer: les constantes de tension superficielle des liquides, leurs mouillabilités et les diamètres des tubes capillaires (Cf. Ex. n°1.13).

EXERCICE N°1.1

Un cylindre plein, de section S, de hauteur h et de masse volumique ρ, est en équilibre à l'intérieur d'un liquide de même masse volumique ρ. L'axe de révolution de ce cylindre est perpendiculaire à la surface libre du liquide Fig(1).



Fig(1)

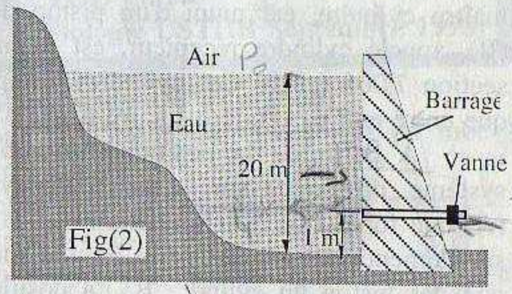
1°- Exprimer la résultante des forces qui s'exerce sur la surface latérale de ce cylindre.

2°- Déterminer la résultante des forces de pression qui s'exerce sur les surfaces de bases de ce cylindre.

3°- En exprimant l'équilibre du cylindre dans le liquide, retrouver la 2° loi de l'hydrostatique.

EXERCICE N°1.2

La section droite d'un barrage hydraulique à la forme d'un trapèze rectangle Fig(2). A 1 (m) du sol, le barrage est muni d'un orifice horizontal de section s=314 (cm^2). La hauteur de l'eau dans le barrage est de 20 (m)



Fig(2)

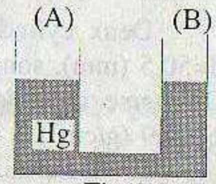
1°- Calculer la force de pression qui s'exerce sur la vanne de vidange.

2°- Calculer la force de la poussée horizontale qui s'exerce sur le barrage et par mètre de largeur.

3°- Pourquoi la section droite du barrage a-t-elle une forme trapézoïdale?

EXERCICE N°1.3
(Extrait de la 3° EMD du TC-Biologie USTHB 1998)

Un tube en U, constitué d'une branche (A) de section S=4 (cm^2), et d'une branche (B) de section s=2 (cm^2), contient du mercure de masse volumique ρ_0=13,6 (g/cm^3) Fig(3).



Fig(3)

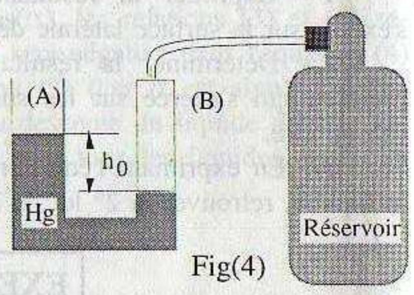
Dans la branche (A), on verse 20 (cm^3) d'eau et dans la branche (B) 30 (cm^3). La masse volumique de l'eau est ρ_e=1 (g/cm^3).

1°- Calculer les hauteur h_a et h_b des colonnes d'eau dans les branches (A) et (B).

2°- Calculer la dénivellation h entre les deux niveaux de mercure et celle h' entre les surfaces libres de l'eau dans les deux branches.

3°- Quel volume d'huile, de masse volumique $\rho'=0{,}8$ (g/cm^3), doit-on verser dans la branche (A) pour que les surfaces libres, de l'eau et de l'huile dans les branches (A) et (B), soient dans un même plan horizontal.

4°- On vide le tube en U de l'eau et de l'huile qu'il contient et on relie, au moyen d'un tuyau de volume négligeable, sa branche (B) à un grand réservoir de gaz. La dénivellation h_0 entre les deux niveaux de mercure est alors celle qui est représentée sur la Fig(4) et sa valeur vaut 4 (cm). Quelle est la pression du gaz dans le réservoir?

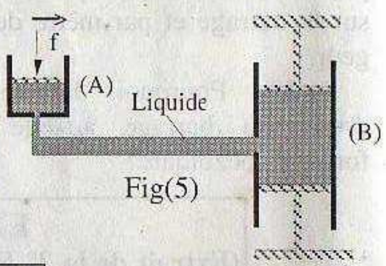


Fig(4)

EXERCICE N°1.4

La Fig(5), ci-après, schématise le principe du freinage hydraulique, utilisé, traditionnellement, dans les engins roulants. Le cylindre (A), appelé maître cylindre, est muni d'un piston de section 0,785 (cm^2). Le cylindre (B), appelé cylindre récepteur, est muni de deux pistons, identiques et de section 7,065 (cm^2). Ces cylindres, remplis d'un liquide de frein, communique entre eux par l'intermédiaire d'une conduite de faible diamètre.

A partir de la position d'équilibre du système, on exerce sur le piston du cylindre (A) une force $\vec{f}$ de 50 (N); déterminer la force supplémentaire exerçée par le liquide sur chacun des piston du cylindre B. La position du cylindre (B), par rapport à celle du cylindre (A), influe-t-elle sur le résultat précédent? Pourquoi?



Fig(5)

EXERCICE N°1.5

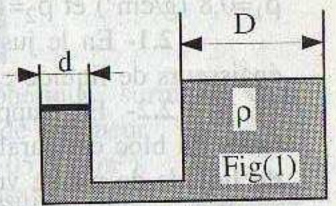
Deux cylindres, verticaux et de diamètres intérieurs: D=50,5 (cm) et d=50,5 (mm), sont reliés par leur base par un tube de faible diamètre Fig(1). On verse dans le grand cylindre 201 litres d'huile de masse volumique $\rho_h=0{,}9$ (g/cm^3)

1°- Déterminer les hauteur des colonnes d'huile dans chacun des cylindres.

2°- Sur la surface libre de l'huile du petit cylindre, on pose un piston d'épaisseur h_1= 5 (cm) et de diamètre d=50,5 (mm). Sachant que le piston est en acier et que sa masse volumique ρ vaut 7,8 (g/cm^3); déterminer:

2.1- La pression de l'huile sous le piston.

2.2- La hauteur de dénivellation h entre les deux niveaux d'huile.



Fig(1)

2.3- Quelle doit être l'épaisseur h_2 d'un piston en acier, de diamètre D=50,5 (cm) et de masse volumique 7,8 (g/cm3), que l'on doit poser sur la surface libre de l'huile du grand cylindre, pour ramener les deux niveaux d'huile dans un même plan horizontal?

3°- Ce dispositif est utilisé pour soulever, de 1 (m), une charge (voiture) de masse M_c=2500 (Kg). Déterminer:

3.1- La force que doit exercer, perpendiculairement, un opérateur sur le petit piston.

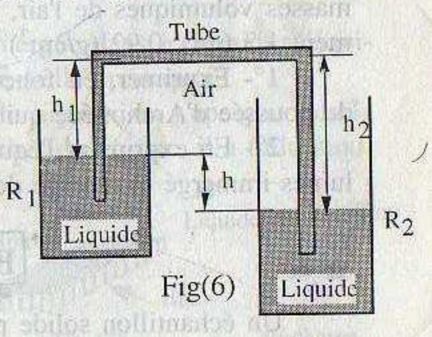
3.2- La pression de l'air comprimé nécessaire, si le petit cylindre est mis en communication avec un compresseur.

Les pistons sont supposés glisser sans frottement dans leur cylindre. On prendra g=10 (m/s2).

EXERCICE N°1.6
(Extrait de l'E.RATT. du TC-Biologie USTHB Septembre 1998)

(Principe de fonctionnement d'un siphon)

Soient deux réservoirs, contenant un même liquide, et un tube (ou tuyau), rempli également du même liquide et dont les extrémités sont bouchées. Après introduction de ces dernières dans les liquides des réservoirs Fig(6), on supprime leurs bouchons. Montrer que selon la disposition des niveaux de liquide dans les réservoirs R_1 et R_2, le liquide se déverse de R_1 vers R_2, de R_2 vers R_1 ou reste stable.



Fig(6)

EXERCICE N°1.7

Un bloc métallique, creux, de forme cubique et d'arête a=20 (cm), a une masse de 7(Kg).

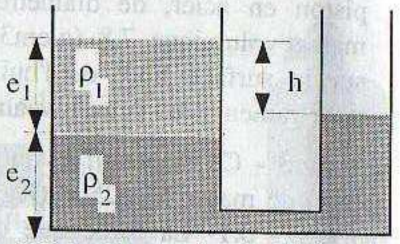
1°- Déterminer sa masse volumique moyenne ρ_0 .

2°- On le plonge dans un récipient qui contient deux liquides non miscibles. Après équilibre, les hauteurs des liquides dans le récipient sont: $e_1=e_2=15$ (cm). Quant aux masses volumiques des liquides, elles valent: $\rho_1=0{,}8$ (g/cm^3) et $\rho_2=1$ (g/cm^3).

2.1- En le justifiant, dessiner, qualitativement, le récipient, les deux épaisseurs de liquide et le bloc.

2.2- En supposant que l'une des faces du bloc est parallèle à la surface libre du liquide de masse volumique ρ_1, déterminer la poussée exercée par chacun des liquides sur le bloc.

3°- En fait, le récipient, précédent, communiquait par sa base avec un autre récipient (Cf. figure ci-contre).



N.B. Le bloc est dans le récipient mais il n'est pas représenté sur la figure, en raison de la question n° 2.1

3.1- Déterminer la dénivellation h entre les surfaces libres des liquides.

3.2- La dénivellation h dépend elle du bloc et de sa position?

EXERCICE N°1.8
(Extrait de l'E.SYNT. du TC-Biologie USTHB Juin 1998)

Un iceberg est un énorme bloc de glace qui est détaché d'une banquise.

On considère un iceberg de volume V_0 qui flotte sur l'eau de mer. Les masses volumiques de l'air, de la glace et de l'eau de mer valent respectivement 1,3 (g/l), 0,92 (g/cm^3) et 1,03 (g/cm^3).

1°- Exprimer, en fonction de V_0 et du volume immergé V_i, la force de poussée d'Archiméde qui s'exerce sur l'iceberg.

2°- En exprimant l'équilibre de l'iceberg, déterminer le rapport des volumes immergé et émergé de l'iceberg.

EXERCICE N°1.9

Un échantillon solide pèse 330 (g) dans l'air. Lorsqu'il est plongé dans une éprouvette graduée en (cm^3) et contenant un liquide, le niveau de ce dernier passe de $V_1=100$ (cm^3) à $V_2=133{,}3$ (cm^3).

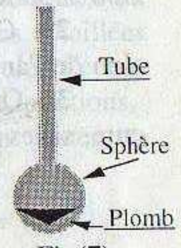
1°- déterminer la masse volumique moyenne de cette échantillon solide.

2°- L'analyse au laboratoire de cet échantillon a montré qu'il contenait

deux substances A et B. Sachant que les masses volumique de ces substances sont $\rho_A=19{,}5$ (g/cm^3) et $\rho_B=8{,}94$ (g/cm^3); déterminer la proportion de A dans l'échantillon.

EXERCICE N°1.10

Un densimètre est constitué d'un réservoir sphérique, surmonté d'un tube cylindrique, plein et de section $s=1{,}6$ (cm^2) et de longueur 30 (cm). Le volume total V_0 de l'appareil est de 105,6 (cm^3). Pour permettre à la tige de se maintenir dans la position verticale quand le densimètre est plongé dans un liquide, un morceau de plomb a été fixé au fond du réservoir sphérique Fig(7).



Fig(7)

Lorsque ce densimètre est plongé dans l'eau, le tube émerge de 16 (cm), alors que dans l'alcool il n'émerge que de 2 (cm).

1°- Déterminer la masse volumique de l'alcool.

2°- Comment doit-on graduer le tube pour que l'on puisse déterminer la masse volumique d'un liquide par simple lecture? Quelle est alors la plage des densités mesurable par cet appareil?

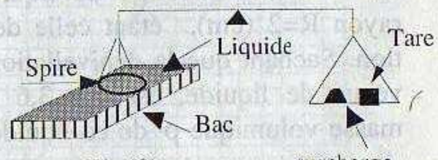
EXERCICE N°1.11

La Fig(8) schématise une des méthodes de détermination des constantes de tension superficielle des liquides. Le dispositif est constitué d'une balance, d'un bac rempli d'un liquide et d'une spire circulaire fine de rayon 2,5 (cm).

Dans l'air on établit l'équilibre de la spire au moyen d'une tare m_0. Ensuite, on introduit la spire dans le bac.

1°- Quant la spire est complètement immergée dans le liquide, l'équilibre est rompu. De quel côté la balance penche-t-elle? pourquoi?

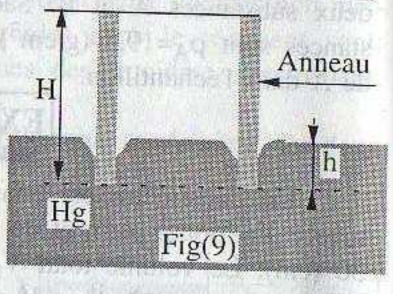
2°- Lorsqu'on essaie de séparer la spire du liquide, on s'aperçoit que la balance penche du côté de la spire. Pour l'arracher du liquide, il a fallu ajouter, à la tare et d'une façon progressive, une masse de 0,71 (g). Quelle est la valeur de la constante de tension superficielle du liquide contenu dans le bac? (En supposera le mouillement parfait entre le matériau de la spire et le liquide).



Fig(8)

EXERCICE N°1.12

Un anneau en verre, de hauteur H=10 (cm), de rayon interne $R_i=9{,}5$ (cm), de rayon externe $R_e=10{,}5$ (cm) et de masse volumique $\rho=2{,}6$ (g/cm^3), flotte sur du mercure, de masse volumique ρ_0=13,6 (g/cm^3), de constante de tension superficielle A=0,45 (N/m) et dont la mouillabilité est définie par α=120° Fig(9).



Fig(9)

1°- Déterminer, en grandeur, en sens et en direction, la résultante des forces de tension superficielle s'exerçant sur l'anneau.

2°- Calculer la profondeur h d'immersion de l'anneau dans le mercure.

3°- Quelle serait la profondeur h' d'immersion de l'anneau dans le mercure, si les forces de tension superficielle étaient négligeables?

EXERCICE N°1.13

L'une des branche du tube, en U et en verre, est un capillaire de rayon r=0,1 (cm). Par sa branche large et dans la position verticale, on verse un liquide de masse volumique ρ_0=1 (g/cm^3) et de constante de tension superficielle A=0,072 (N/m). Le mouillement du liquide envers le verre est caractérisé par α=30°.

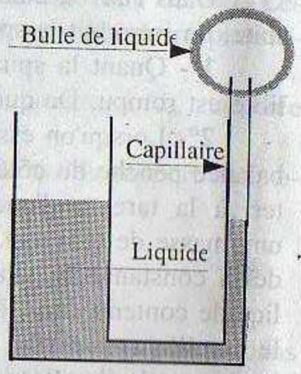
1°- Déterminer la dénivellation h entre les deux niveaux de liquide.

2°- Sur l'extrémité supérieure du capillaire, on place une bulle sphérique, du même liquide et de rayon R=2 (cm), Fig(10),

2.1- Déterminer la pression P'$_0$ de l'air dans le tube capillaire.

2.2- Quelle est la nouvelle dénivellation h' entre les deux surfaces libres du liquide?

3°- Dans le tube en U précédent, on a remplacé le liquide de masse volumique ρ_0 par un autre, de masse volumique ρ', de constante de tension superficielle A'=0,285 (N/m) et dont le mouillement est α'=120°. La bulle de liquide, sphérique et de rayon R=2 (cm), étant celle de la deuxième question. Sachant que la dénivellation, entre les deux niveaux de liquide, est h"= 3,6 (cm); déterminer la masse volumique ρ' de ce liquide.



Fig(10)

Cette série d'exercices est celle proposée aux étudiants des troncs communs: de biologie, des sciences de la terre et de l'agronomie (STA) et des sciences de la nature et de la vie (SNV) des Universités: de l'USTHB, de Blida et de Tizi ouzou, ainsi qu'aux CBM (au centre biomédical) de Dargana et de Tizi ouzou. Les étudiants concernés pourront donc l'utiliser en même temps que le fascicule. En quelque sorte, elle constitue pour eux un bon moyen de vérification de l'assimilation du cours. Les solutions détaillées de ces exercices ne sont, bien sûr, pas données dans ce fascicule. Cependant, dans la partie solutions, nous avons donné les réponses aux questions, sans explications, pour que l'étudiant sache si ses réponses sont justes ou fausses.

Pression et forces de pression

Ex. n°1.

Une brique pleine, de forme cubique et d'arête a=15 (cm), pèse 8 (kg). Par l'une de ces faces, elle repose sur un surface solide (π). Déterminer la pression qu'elle exerce sur (p) dans les cas suivants:

1°- La surface (π) est horizontale.

2°- La surface (π) est inclinée de 30° par rapport à l'horizontale.

3°- La surface (π) est horizontale mais la brique est tirée avec une force de 10 (N), vers le haut et verticalement, par un élastique.

Ex. n°2.

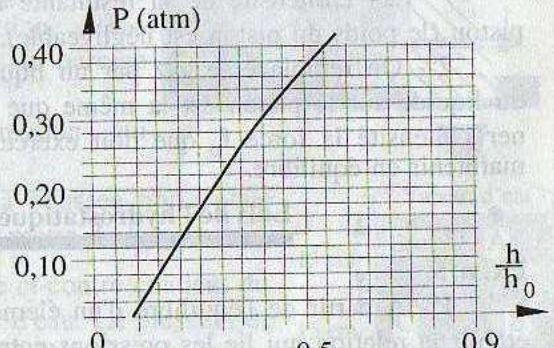
Les masses d'un skieur et de ses skis sont, respectivement, de 80 (kg) et de 10 (kg). La surface portante de chaque ski est de 1190 (cm2). Les skis sont supposés identiques. Dans cet exercice, on prendra g=10 (m/s^2) et l'épaisseur de la neige fraîche h$_0$=1 (m).

1°-. Calculer la pression subie par la neige

2°- Les semelle des chaussures du skieur sont identiques et ont une surface de 216 (cm2). Déterminer, dans les cas suivants, la pression subie par la neige si les skis n'existaient pas.

2.1- Le skieur est immobile sur la neige.

2.2- Le skieur marche sur la neige.



Fig(1)

3°- Quand la neige fraîche est comprimée d'une longueur h, La pression

P de compression qu'elle subit est supposée obéir au graphe de la Fig(1); h_0 étant l'épaisseur de la neige fraîche non comprimée. Déterminer la profondeur h des traces laissées sur la neige dans les cas précédents (1°, 2.1 et 2.2).

Ex. n°3.

Un bêcher, de forme cylindrique et de rayon intérieur R=6 (cm), est rempli d'un liquide, de masse volumique ρ=13,6 (g/cm^3), sur une hauteur h= 10 (cm).

1°- Déterminer le volume du liquide contenu dans le bêcher En déduire son poids P.

2°- Calculer la pression exercée par le liquide sur le fond du bêcher, quand ce dernier est posé sur:

2.1- une surface horizontale.

2.2- une surface inclinée de 30° par rapport à l'horizontale.

3°- Le bêcher, contenant le liquide, est posé sur un petit tabouret à trois pieds. Les surfaces de contact des pieds du tabouret avec le sol sont, respectivement, 1 (cm^2) , 1,5 (cm^2) et 2 (cm^2). Déterminer la pression exercée par chacun des pieds sur le sol horizontal, sachant que le poids du tabouret est de 25 (N) et celui du bêcher de 5 (N).

Ex. n°4.

Une seringue, de section intérieure 1 (cm^2), renferme de l'air à la pression P_1= 2 (atm).

1°- déterminer:

1.1- L'intensité de la force f, exercée par le gaz, sur le piston de la seringue.

1.2- L'intensité de la résultante R des forces qui s'exercent sur le piston (le poids du piston est négligeable).

2°- On remplace le gaz par un liquide. En supposant que la pression du liquide sur le piston est la même que précédemment (2 (atm)), déterminer l'intensité la force f_p que doit exercer l'opérateur sur le piston pour le maintenir en équilibre.

Lois de l'hydrostatique et applications

Ex. n°5.

1°- A partir de l'équilibre d'un élément fluide, de masse volumique ρ, établir la relation qui lie les pressions entre deux points d'un même fluide et de dénivellation h.

2°- En utilisant la relation établie au 1°, déterminer la pression en un point d'un lac se trouvant à 200 (m) de profondeur. On prendra g=10 (m/s^2),

la pression de l'air égale à 1 (atm)=10^5 (N/m^2) et la masse volumique de l'eau égale à 1 (g/cm^3).

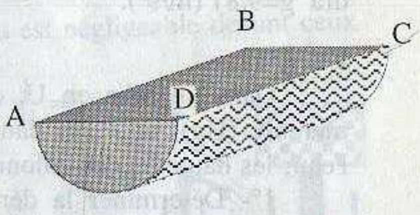
Ex. n°6.

Un sous marin d'exploration des fonds marins est muni d'hublots pour observer et filmer la faune marine; ses hublots sont identiques et ont la forme d'un disque de diamètre 30 (cm). La pression de l'air à l'intérieur de l'habitacle est environ 1 (atm) et la masse volumique de l'eau de mer, supposée calme, vaut ρ=1,02 (g/cm^3).

1°- Déterminer, en module, en sens et en direction, la force qui s'exerce sur l'hublot supérieur quand il est dans la position horizontale et à une profondeur de 300 (m).

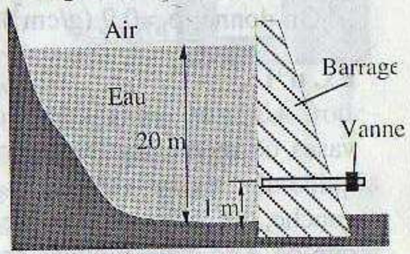
2°- L'hublot est conçu pour résister à des forces de pression de 4,310^5 (N); calculer la profondeur de descente maximale du sous marin.

Ex. n°7.



Un vase a la forme d'un demi cylindre de rayon intérieur R=50 (cm) et de longueur 3 (m). Son plan diamétral ABCD est horizontal (Cf. Figure). Le vase est rempli d'eau, de masse volumique ρ_e=1 (g/cm^3); déterminer, en intensité, en sens et direction, la résultante F des forces qui s'exerce sur chacun des demi disque de ce vase. La pression atmosphérique est supposée égale à 10^5 (N/m^2).

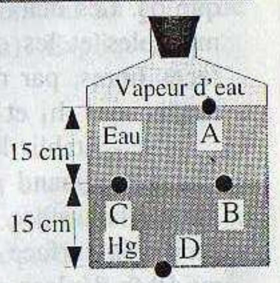
Ex. n°8.



La section droite d'un barrage hydraulique à la forme d'un trapèze rectangle (Cf. Figure). A 1 (m) du sol, le barrage est muni d'un orifice horizontal de section s=314 (cm^2). La hauteur de l'eau dans le barrage est de 20 (m)

1°- Calculer la force de pression qui s'exerce sur la vanne de vidange.

2°- Calculer la force de la poussée horizontale qui s'exerce sur le barrage et par mètre de largeur.



Ex. n°9: Le récipient de la figure ci-contre contient du mercure, de l'eau et de la vapeur d'eau. La pression de la vapeur d'eau étant de 2,4 10^5 (N/m^2), déterminer les pressions au points A, B, C et D.

On donne: ρ_e=1 (g/cm^3), ρ_{Hg}=13,6 (g/cm^3) et g=10 (m/s^2).

Ex. n°10.

Dans une conduite d'eau potable, la pression au rez de chaussée d'un immeuble, est de $2{,}758\ 10^5$ (N/m^2). A quelle hauteur maximale l'eau pourra-t-elle monter? Expliquer.

Ex. n°11.

Sur un tronçon horizontal, un véhicule, animé d'une accélération $a=9{,}81$ (m/s^2), transporte un récipient, de forme cubique et d'arête 50 (cm), remplit à moitié d'eau.

1°- Quelle est la forme de la surface libre de l'eau?

2°- Quelle est la pression en un point du liquide, situé à 10 (cm) du fond et à 10 (cm) de la paroi arrière du récipient. $P_{air}=10^5$ (N/m^2). On prendra $g=9{,}81$ (m/s^2).

Ex. n°12.

Dans un tube en U, de section uniforme $S=1$ (cm^2) et contenant du mercure (Hg), on verse dans l'une des branches de l'huile et dans l'autre de l'eau; les hauteurs des colonnes d'huile et d'eau sont égales et valent 50 (cm).

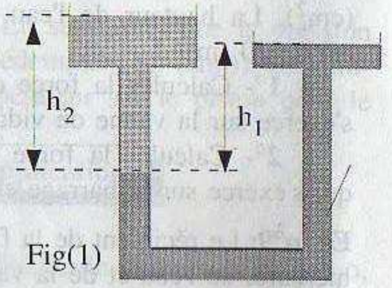
1°- Déterminer la dénivellation entre les surfaces inférieures des colonnes d'eau et d'huile.

2°- Dans quelle branche et quelle quantité d'huile doit-on ajouter pour que les niveau de mercure soit dans un même plan horizontal.

On donne: $\rho_h=0{,}9$ (g/cm^3), $\rho_{Hg}=13{,}6$ (g/cm^3), $\rho_e=1$ (g/cm^3) et $g=10$ (m/s^2).

Ex. n°13.

Un tube en U, de section uniforme s, met en communication deux vases de même section intérieure S Fig(1). Le vase de droite contient un liquide de masse volumique ρ_1 et celui de gauche, un autre liquide de masse volumique ρ_2. Les deux liquides sont supposés non miscibles et les dénivellations de leurs surfaces libres, par rapport à leur surface commune, sont h_1 et h_2.



Fig(1)

1°- Etablir la relation entre h_1 et h_2.

2°- Quand on exerce une surpression ΔP sur la surface libre du liquide du vase de droite, la surface de séparation des deux liquide se déplace de y. Exprimer y en fonction de ρ_1, ρ_2, s, S et de ΔP

3°- Calculer la valeur numérique de y pour: $\rho_1=1{,}027$ (g/cm^3), $\rho_2=1$ (g/cm^3), $s/S=1/50$ et $\Delta P=6{,}754$ (N/m^2).

Ex. n°14.

Deux cylindres, verticaux et de sections $S=1$ (m^2) et $s=10$ (cm^2), sont reliés à leur base par un tube de faible diamètre (*). Dans le grand cylindre, on verse de l'eau et on pose sur la surface libre de celle ci un piston dont le poids est de 500 (N).

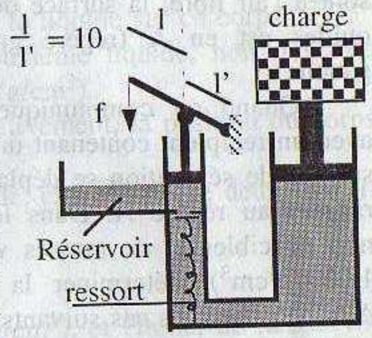
1°- Déterminer la dénivellation entre les deux niveaux d'eau.

2°- Quel est le poids du piston qu'il faudrait placer sur la surface libre du petit cylindre, pour ramener les niveaux d'eau des deux cylindres dans un même plan horizontal?

3°- Quant le petit piston se déplace de 10 (cm), de combien se déplace le grand piston?

4°- Quelle force doit-on exercer sur le petit piston pour le maintenir dans la position du 3°.

(*) le volume d'eau contenu dans le tuyau est négligeable devant ceux des cylindres.



Ex. n°15.

Le crics hydraulique de la figure ci-contre, fonctionnant avec de l'huile de masse volumique 0,9 (g/cm^3), est utilisé pour soulever un charge de 500 (Kg), sur une hauteur de 40 (cm). La course maximale du petit piston est de 5 (cm). le rapport des longueur du levier est de 10. Les poids des pistons des deux cylindres sont négligeables devant les forces qui agissent sur eux. Les frottements des pistons dans leur cylindres sont également négligeables.

1°- Quel doit-être le rapport des sections (S/s) des pistons pour que la charge se déplace de 40 (cm) après 40 coups de barre?

2°- Quelle est la force maximale exercée par l'opérateur au cours de cette opération, si le diamètre du petit piston est de 2 (cm)? Expliquer.

3°- Le résultat dépend-il du liquide utilisé?

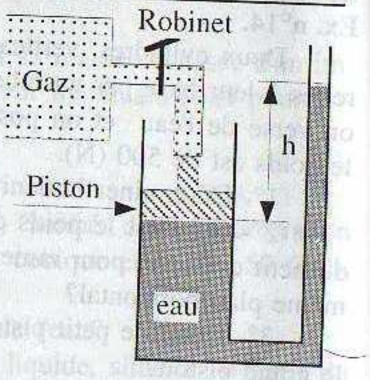
Ex. n°16.

le manomètre de la figure ci-après peut être mis en communication avec une enceinte contenant un gaz à la pression P. La liaison se fait au moyen d'un tuyau, de volume négligeable, branché sur la partie supérieur, de section $s=1$ (cm^2), du piston. La section inférieure du piston est $S=0{,}01$ (m^2). La masse du piston est de 1 (kg) et le liquide utilisé, dans ce manomètre, est de l'eau (ρ_e=1 (g/cm^3)).

1°- Le piston est à l'air libre, calculer la dénivellation h_0 entre les deux niveaux de liquide.

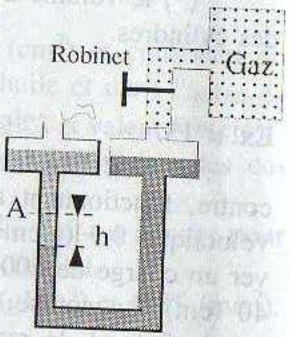
2°- Le piston est mis en communication avec une enceinte contenant un gaz. La dénivellation entre les deux niveaux de liquide est alors h=15 (cm). Quelle est la valeur de la pression de ce gaz?

(prendre g=10 (m/s^2) et P_0=10^5 (N/m^2).



Ex. n°17.

le manomètre de la figure ci-contre, dit à 2 liquides, permet de mesurer les faibles pressions. Lorsque les deux réservoirs sont à l'air libre, la surface de séparation des deux liquides est en A (repère gravé sur la branche de gauche).



Quand on communique le réservoir de droite avec un récipient contenant un gaz à la pression P, la surface de séparation se déplace d'une distance h, par rapport au repère A. Dans le cas de deux liquides, non miscibles et de masses volumiques 1 (g/cm^3) et 1,02 (g/cm^3), déterminer la différence de pression $\Delta P=P-P_0$ dans les cas suivants:

1°- Le déplacement s'est effectué vers le bas et h=3 (cm)

2°- Le déplacement s'est effectué vers le haut et h=3 (cm)

3°- Quelle aurait été la dénivellation h', entre les surfaces libres du liquide, si les deux liquides étaient remplacés par un seul, de l'eau par exemple. Conclusion?

Les deux réservoirs sont supposés identiques et leurs sections valent 5 (cm^2) chacune. Quant à la section du tube en U, elle vaut 5 (mm^2).

Poussée d'Archiméde et flottabilité

Ex. n°18.

Dans un récipient, contenant de l'eau de masse volumique ρ_1=1 (g/cm^3), on pose un cube en bois, de masse volumique ρ_2=0,5 (g/cm3), de manière à ce que sa face supérieure reste parallèle à la surface libre de l'eau.

1°- Quand on colle une petite masse (*) de 0,4 (kg) sur la face supérieure du cube, il s'enfonce de 4 (cm), par rapport à sa position initiale. Déterminer la valeur numérique de l'arête de ce cube.

2°- On renverse le cube. déterminer la hauteur émergée h de ce cube.

3°- Dans la position du 2° et par mégarde, on a renversé de l'huile, de masse volumique ρ_3=0,8 (g/cm^3), dans le récipient. La hauteur émergée du cube devient alors h'= 0,5 (cm). déterminer:

3.1- l'épaisseur de la couche d'huile.

3.2- la quantité d'huile qui est tombée dans le récipient, sachant que sa section intérieure est uniforme et vaut S=0,5 (m^2).

(*) Le volume de la masse est négligeable devant celui du cube.

Ex. n°19.

Un corps, de forme sphérique, creux, de rayon R=12,5 (cm) et de masse 10 (kg), est posé dans un récipient contenant un liquide de masse volumique ρ_1= 13,6 (g/cm^3). On prendra g=10 (m/s^2).

1°- Quelle est la masse volumique moyenne de ce corps.

2°- Déterminer la poussée π, exercée par le liquide sur ce corps

3°- On remplit le récipient avec un deuxième liquide, non miscible avec le premier et de masse volumique ρ_2=1 ((g/cm^3).

3.1- Sur un dessin, représenter, qualitativement, la position du corps sphérique?

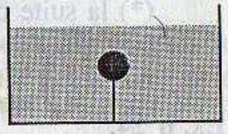
3.2- déterminer la poussée d'Archimède, exercée par le deuxième liquide (ρ_2=1 (g/cm^3)), sur le corps sphérique.

Ex. n°20.

Entre l'eau, de masse volumique ρ=1 (g/cm^3), et l'huile, de masse volumique ρ_h=0,85 (g/cm^3), se trouve un corps de masse volumique moyenne ρ_0=0,9 (g/cm^3). Déterminer la fraction du volume de ce corps qui est immergée dans l'eau.

Ex. n°21.

Dans un récipient, contenant une solution liquide de masse volumique ρ_1=3,2 (g/cm^3), une balle sphérique, pleine, de masse volumique ρ_0=1,2 (g/cm^3) et de volume V_0=102 (cm^3), est maintenue complètement immergée à l'aide d'un fil (Cf. Figure ci-contre)



1°- Calculer la tension T du fil.

2°- Dans le même récipient, on verse de l'huile, de masse volumique ρ_2=0,8 (g/cm^3), sur une épaisseur de 6 (cm) puis, on coupe le fil d'attache de la balle. A l'équilibre, déterminer le volume de la balle baignant dans chaque liquide.

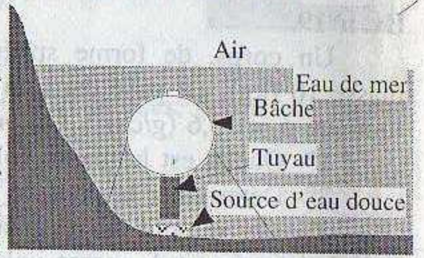
3°- Une autre balle creuse, de même volume que la précédente et de masse volumique ρ'_0=0,8 (g/cm^3), est introduite dans le récipient. Quel est le volume de la balle immergé dans l'huile.

(La pression atmosphérique vaut 1 (atm) et la masse volumique de l'air est de 1,03 (g/l)).

Ex. n°22.

Les masses volumiques de l'eau de mer, de la glace et de l'air atmosphérique, valent, respectivement, ρ_{em}=1,02 (g/cm^3), ρ_g=0,92 (g/cm^3) et ρ_a=1,03 (g/l)). Quelle est la proportion de volume immergé d'un iceberg.

Ex. n°23.



Une bâche est cousue pour prendre la forme sphérique quand elle est remplie d'un fluide. Cette bâche, de masse négligeable et de capacité V_0 = 524 (m^3), est utilisée pour récupérer l'eau douce d'une source marine (*), se trouvant à 54 (m) de profondeur. La bâche est munie d'une vanne à sa partie supérieure et est attachée, pendant le remplissage, par des câbles au sol.

Les masses volumiques de l'eau douce, de l'eau de mer et de l'air atmosphérique sont, respectivement, ρ_{ed}=1 (g/cm^3), ρ_{em}=1,02 (g/cm^3) et ρ_a=1,03 (g/l).

1°- montrer que la bâche, disposée comme indiqué sur la figure, se remplira d'eau douce.

2°- Une fois remplie, la bâche se trouve 40 (m) de profondeur. Dans cette position, on détache les câbles qui la retienne (Cf. Figure). En négligeant les frottements, les poids du tuyau et de la bâche, déterminer:

2.1- en sens, en direction et en intensité, la résultante des forces appliquées à la bâche.

2.2- Le temps nécessaire à la bâche pour remonter à la surface.

(*) la suite de l'exercice est traitée dans la partie diffusion moléculaire

Mesure de masses volumiques - Densimètre

Ex. n°24.

Quand on plonge un échantillon de roche dans une fiole, posée sur un plan horizontal et remplie à raz d'eau, le volume d'eau qui s'écoule de celle ci est de 3,6 (cm^3). Sachant que la pesée de l'échantillon à révélée que sa masse est de 10 (g); déterminer:

1°- la masse volumique moyenne ρ_0 de cet échantillon.

2°- son poids apparent dans la fiole. Y-a-t-il un lien entre le poids ap-

parent de l'échantillon avec le poids du volume d'eau qui s'est écoulé de la fiole? si oui, lequel?

Ex. n°25.

Un bijoutier prétend que ses bijoux sont en or pur. Une de ses cliente qui vient d'acquérir une parure de 800 (g) se propose de vérifier ses dires.

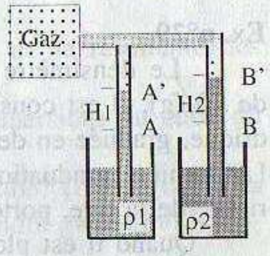
En se documentant, elle trouve que la masse volumique de l'or pur est de 19,5 (g/cm^3) et que, souvent, les bijoux "dits en or" contiennent du cuivre de masse volumique 8,9 (g/cm^3). Elle la pèse alors dans l'air et dans l'eau. Les pesées donnent: m_1=800 (g) dans l'air et m_2=746 (g) dans l'eau.

1°- Quelle est la masse volumique de la parure?

2°- Le bijoutier est-il un menteur? Si oui, pourquoi?

3°- Si vous avez répondu par un oui à la 2°question déterminer la masse d'or réelle contenue dans la parure.

Ex. n°26.



Les tubes de la figure ci contre communiquent par leur base et avec une enceinte de pression variable. Comme indiqué sur la figure, On les plonge dans des récipients, contenant deux liquides de masse volumique ρ_1 et ρ_2, puis on fait passer la pression de l'enceinte de P_0 à P'_0 (P_0>P'_0). Les niveaux des liquides dans les tubes sont alors repérés par A et B. On réalise une seconde dépression dans l'enceinte qui amène la pression du gaz à P''_0<P'_0; les niveaux des liquides dans les tubes passent alors en A' et B' tels que: AA'=H_1 et BB'=H_2.

1°- Trouver la relation liant ρ_1, ρ_2, H_1 et H_2.

2°- Calculer la masse volumique ρ_2 du liquide 2, sachant que le liquide 1 est de l'eau ρ_1=1 (g/cm^3) et que les mesures de H_1 et de H_2 donnent, respectivement, H_1=20 (mm) et H_2=25 (mm).

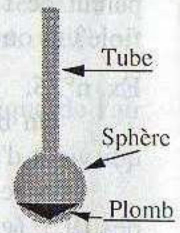
Ex. n°27.

Une éprouvette, graduée en cm et contenant de l'eau, a une section de 31,4 (cm^2). Quand on plonge complètement un morceau de glace dans cette éprouvette, le niveau de l'eau monte de 5 (cm). Le morceau de glace, en question, a initialement la forme d'un cylindre de rayon r=2 (cm). Lorsque il est abandonné à lui même, il flotte sur l'eau et quand sa base supérieure est horizontale, la longueur de sa partie immergée est de 11,5 (cm).

1°- Déterminer la masse volumique de la glace.

2°- De combien varie le niveau de l'eau dans l'éprouvette, par rapport au niveau initial, quand le glaçon est complètement fondu?

Ex. n°28.



Un densimètre est constitué d'un réservoir sphérique, surmonté d'un tube cylindrique, plein et de section s=1,6 (cm^2) et de longueur 30 (cm). Le volume total V_0 de l'appareil est de 105,6 (cm^3). Pour permettre à la tige de se maintenir dans la position verticale quand le densimètre est plongé dans un liquide, un morceau de plomb a été fixé au fond du réservoir sphérique (Cf. Figure ci-contre).

Lorsque ce densimètre est plongé dans l'eau, le tube émerge de 16 (cm), alors que dans l'alcool il n'émerge que de 2 (cm).

1°- Déterminer la masse volumique de l'alcool.

2°- Comment doit-on graduer le tube pour que l'on puisse déterminer la masse volumique d'un liquide par simple lecture? Quelle est alors la plage des densités mesurable par cet appareil?

Ex. n°29

Le densimètre de la figure ci-contre a une masse totale de 40 (g). Il est constitué d'un flotteur lesté et d'une tige cylindrique, graduée en densité, de section s et de longueur 20 (cm). La dernière graduation, située à 19,5 (cm) de l'extrémité supérieure de la tige, porte l'inscription 1,2.

Quand il est plongé dans de l'eau pure, la tige émerge de 0,5 (mm) et la graduation correspondante porte l'indication 1. Déterminer:

1°- La masse volumique moyenne du densimètre.

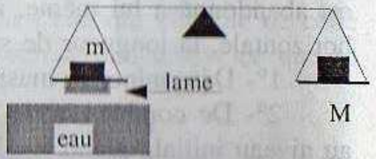
2°- Le volume V_0 du flotteur, compté jusque à la dernière graduation (1,2), et la section s de sa tige.

3°- La hauteur d'émersion h de la tige, quand le densimètre est plongé dans un liquide de densité 1,1.

Tension superficielle et phénomène de capillarité

Ex. n°30.

Une lame de verre, d'épaisseur négligeable et de longueur 5 (cm), est collée sur la partie inférieure d'un plateau d'une balance (Cf. Figure). Au moyen d'une tare M et d'une masse m (Cf. Figure), on a réalisé l'équilibre de la balance.



Dans la position d'équilibre de la balance, on a plongé partiellement la lame dans un bac d'eau puis, on l'avait retirée lentement;

au moment de son extraction de l'eau, la balance s'est déséquilibrée sous l'action des forces de tension superficielle. Pour rétablir l'équilibre de la balance, il a fallu rajouter une masse de 0,32 (g) à la tare M.

1°- Quelle est l'intensité de la résultante des forces de tension superficielle qui s'exerçait sur la lame?

2°- La constante de tension superficielle de l'eau, à la température de l'expérience, est de 72.10^{-3} (N/m), quelle est la valeur numérique du mouillement α de l'eau envers le verre.

(Prendre g=10 (m/s^2))

Ex. n°31.

Un cube en verre, de masse volumique 2,7 (g/cm3) et d'arête 1 (cm), flotte sur du mercure de masse volumique 13,6 (g/cm3). La constante de tension superficielle du mercure et sa mouillabilité, envers le cube, sont, respectivement, $A=450.10^{-3}$ (N/m) et $\alpha=120°$. En supposera la face supérieure du cube parallèle à la surface libre du mercure.

1°- Déterminer la direction, le sens et l'intensité de la résultante des forces de tension superficielle qui s'exerce sur le cube.

2°- Quelle est la hauteur Δh d'immersion (ou d'émersion) du cube dû aux forces de tension superficielle?

3°- Quelle est la profondeur d'immersion h du cube? (on négligera la poussée d'Archimède dû à l'air atmosphérique et en prendra g=10 (m/s^2).

Ex. n°32.

Dans cet exercice, la pression autour de la bulle sera supposée uniforme; la forme de la bulle sera alors sphérique. On supposera également que la bulle n'éclate pas dans l'eau et que la température de l'eau, jusque à la profondeur de 10 (m), est constante. La pression atmosphérique est de 1 (atm).

On considère une bulle d'air, de rayon R=5 (mm) quand elle est à une profondeur h_0=10 (m), qui remonte du fond d'un lac. La constante de tension superficielle de l'eau du lac étant de 75.10^{-3} (N/m), Déterminer:

1°- La pression P_i de l'air qu'elle renferme à 10 (m) de profondeur.

2°- Le rayon de la bulle à 5 (m) de profondeur? On supposera que la chute de pression à l'intérieur de la bulle ΔP_i est reliée à celle de sa profondeur Δh par:

$$\frac{\Delta P_i}{P_i(h_0)} \approx 0,500075 \ \frac{\Delta h}{h_0}$$

Ex. n°33.

A 20 (°C), la constante de tension superficielle de l'eau savonneuse est de 25.10^{-3} (N/m). A partir de cette eau, on forme des bulles de liquide, supposées sphériques. L'une d'elles a un rayon de 1 (cm).

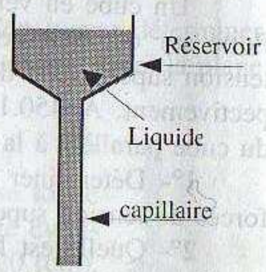
1°- Déterminer la pression de l'air à l'intérieur de cette bulle.

2°- Quelle est l'intensité de la résultante des forces de tension superficielles qui s'exerce sur la moitié de la bulle?

3°- y a-t-il un lien entre la force du 2° et la pression de l'air à l'intérieur de la bulle? Expliquer.

Ex. n°34.

Un capillaire en verre communique avec un réservoir (Cf. Figure). Le diamètre intérieur du capillaire est r=1 (mm). Dans la position verticale du capillaire, on remplit le réservoir d'un liquide puis, on libère l'extrémité inférieure du capillaire. A la température de l'expérience, la constante de tension superficielle du liquide et sa mouillabilité envers le verre sont, respectivement, $A=72.10^{-3}$ (N/m) et $\alpha=30°$. Quant à sa masse volumique, elle vaut $\rho=1,10$ (g/cm^3).



1°- Montrer que le liquide coule goutte à goutte.

2°- Déterminer la masse de l'une de ces gouttes (On prendra g=10 (m/s^2)).

Ex. n°35.

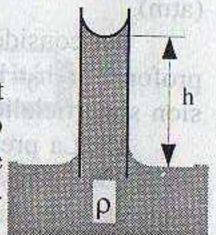
Le capillaire d'un compte gouttes a un rayon intérieur de 0,5 (mm). On le remplit d'un liquide X puis, on laisse couler ce dernier dans une capsule. Après avoir recueilli 200 gouttes de liquide dans la capsule, on les pèse; la masse de liquide recueilli est alors m=10 (g).

1°- Déterminer la valeur de la constante de tension superficielle de ce liquide (le mouillement de ce liquide sera supposé égal à 30°).

2°- Le liquide X est en fait un médicament; un malade doit en prendre 0,1 (g) toutes les 12 heures. Comment doit-il s'y prendre?

Ex. n°36.

Un tube capillaire, en verre et de rayon intérieur r, est plongé, partiellement, dans un liquide de masse volumique ρ (Cf. Figure). Le ménisque, observé dans le tube, a la forme d'un demi cercle et la constante de tension superficielle du liquide est A.

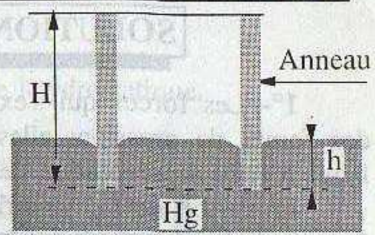


1°- En fonction de r, de ρ, de A et de l'accélération de la pesanteur g, déterminer la hauteur d'ascension h du liquide dans le capillaire.

2°- Le liquide, en question, est de l'eau ($A=72.10^{-3}$ (N/m) et $\rho=1$(g/cm^3)) et la hauteur d'ascension h vaut 2,5 (cm); quelle est la valeur numérique du rayon r du capillaire?

Ex. n°37.

Un anneau en verre, de hauteur H=10 (cm), de rayon interne $R_i=9,5$ (cm), de rayon externe $R_e=10,5$ (cm) et de masse volumique $\rho=2,6$ (g/cm^3), flotte sur du mercure (Cf. Figure).



La masse volumique du mercure est $\rho_0=13,6$ (g/cm^3), Quant à sa constante de tension superficielle et à sa mouillabilité envers le verre, elles valent, respectivement, A=0,45 (N/m) et $\alpha=120°$.

1°- Déterminer, en grandeur, en sens et en direction, la résultante des forces de tension superficielle s'exerçant sur l'anneau.

2°- Calculer la profondeur h d'immersion de l'anneau dans le mercure.

3°- Quelle serait la profondeur h' d'immersion de l'anneau dans le mercure, si les forces de tension superficielle étaient négligeables.

Ex. n°38.

Un tube en U, transparent et dont l'une des branches est un tube capillaire, contient un liquide X. Les caractéristiques de ce liquide, à la température de l'expérience, sont: masse volumique $\rho=1,15$ (g/cm^3). constante de tension superficielle $A=70.10^{-3}$ (N/m) et mouillabilité envers le verre $\alpha=30°$.

1°- Déterminer La dénivellation h entre les surfaces libres du liquide, sachant que le rayon de la branche capillaire vaut 0,5 (mm).

2°- Quand on pose, sur la partie supérieure du capillaire, une bulle, supposée sphérique et de rayon 2 (mm), d'un second liquide, la dénivellation entre les deux niveaux du liquide X s'annule. Déterminer la constante de tension superficielle du second liquide.

Ex. n°39.

En tenant compte de la masse d'eau, située au dessus du plan tangent au ménisque, et en assimilant ce dernier à une hémisphère, écrire l'équation d'équilibre de la colonne d'eau qui s'élève dans un tube capillaire, quand il est plongé partiellement et verticalement dans l'eau.

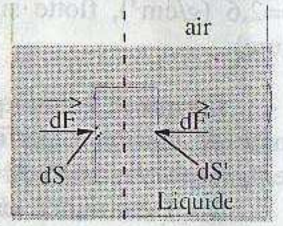
1°- Exprimer la hauteur d'ascension h du liquide dans le capillaire en fonction: de son rayon r, de l'accélération de la pesanteur g, de la constante de tension superficielle A de l'eau et de la masse volumique ρ de cette eau. La loi de Jurin est elle vérifiée?

2°- À partir de quelle valeur de r, il convient de faire la correction de la loi de Jurin pour que l'erreur relative ne dépasse pas 2%. (Prendre $A=72.10^{-3}$ (N/m), $\rho=1$ (g/cm^3) et $g=9,81$ (m/s^2)).

SOLUTION DE L'EXERCICE N°1.1

1°- Les forces qui s'exercent sur la surface latérale du cylindre sont des forces de pression; elles sont donc perpendiculaires à l'axe de révolution de ce cylindre.

En raison de la symétrie cylindrique de la surface latérale, la résultante des forces de pression, s'exerçant sur elle, est forcément nulle. En effet, chaque fois que l'on considère un élément dS de cette surface Fig(1), on lui trouve un élément de surface dS' symétrique, par rapport à l'axe de révolution du cylindre. Les forces $\overrightarrow{dF}$ et $\overrightarrow{dF'}$ qui s'exercent sur ces éléments de surfaces sont égales et opposées. La résultante $\overrightarrow{F_L}$ de toutes les forces élémentaires, s'exerçant sur cette surface, est donc nulle:



Fig(1)

$$\overrightarrow{F_L} = \sum_i (\overrightarrow{dF_i})_{S.\ laterale} = \vec{0}$$

2°- Etant horizontales et en équilibre, les surfaces de bases du cylindre sont des isobares. Les forces de pression, s'exerçant sur elles, sont donc verticales et leurs intensités valent:

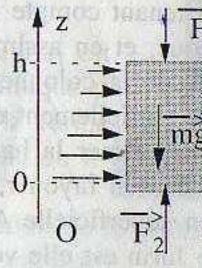
$$F_1 = P_1 S \quad \text{et} \quad F_2 = P_2 S$$

où: S est l'aire de la surface de base du cylindre et 1 et 2 les indices désignant, respectivement, les surfaces supérieure et inférieure.

Comme la pression P_2 est plus grande que la pression P_1, la résultante des forces de pression, s'exerçant sur les surfaces des bases, est dirigée vers le haut et son intensité vaut:

$$F_B = F_2 - F_1 = S(P_2 - P_1)$$

3°- Le cylindre est en équilibre sous l'action des forces de pression $\overrightarrow{F_L}$, $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et de son poids $m\vec{g}$ Fig(2). On a donc:



Fig(2)

$$\overrightarrow{F_L} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_1} + m\vec{g} = \vec{0}$$

soit: $\overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_1} + (\rho S h)\vec{g} = \vec{0}$ (1)

La projection de l'équation (1) sur l'axe vertical Oz donne:

$$F_2 - F_1 - mg = 0 \qquad (2)$$

En remplaçant, dans l'équation (2), F_2-F_1 et m par leurs expressions, on obtient:

$$(P_2 - P_1)S - (\rho S h)g = 0$$

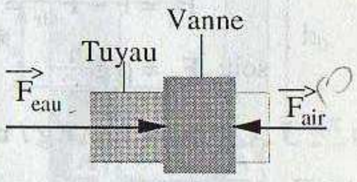
D'où l'expression de la loi fondamentale de l'hydrostatique.

$$P_2 - P_1 = \rho g h$$

SOLUTION DE L'EXERCICE N°1.2

1°- Les forces de pression qui s'exerce sur la vanne sont: celle de l'eau et celle de l'air atmosphérique Fig(2). Les expressions donnant leurs intensités s'écrivent comme suit:

$$F_{eau} = P_2 S \quad \text{et} \quad F_{air} = P_0 S$$



Fig(2)

P_2 et P_0 sont, respectivement, la pression de l'eau au niveau de la vanne et celle de l'air atmosphérique. Quant à S, c'est la section du tuyau.

En fonction de la profondeur h de l'eau dans barrage et de la hauteur h' de la vanne dans ce dernier, la pression P_2 s'exprime comme suit:

$$P_2 - P_0 = \rho g(h - h') \Rightarrow P_2 = \rho g(h - h') + P_0$$

L'intensité F de la résultante des forces de pression est alors:

$$F = F_{eau} - F_{air} = (\rho g S(h - h') + P_0 S) - (P_0 S)$$

soit: $F = \rho g S(h - h')$

A.N: $F \approx (10^3)(9,81)(314\,10^{-4})(20 - 1) = 5853\ (N) = 585,3\ (Kgp)$

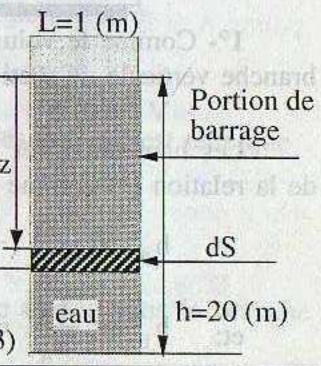
2°- L'expression de l'intensité de la force de pression, exercée par l'eau sur un élément de surface, le longueur L=1 (m), de largeur dz et se trouvant à une profondeur z Fig(3), s'écrit:

$$dF = P(z)\,dS = P(z)\,L\,dz = P(z)dz$$

avec: $P(z) = \rho g z + P_0$

P_0 étant la pression atmosphérique.

soit: $dF = \rho g z dz + P_0 dz$



Fig(3)

- Comme les forces élémentaires qui s'exercent sur tous les éléments dS sont parallèles, l'intensité F de leur résultante est égale à la somme de leurs intensités; soit:

$$F = \int dF = \int_{z=0}^{z=h} \rho g z \, dz + \int_{z=0}^{z=h} P_0 dz$$

c'est à dire:

$$F = \rho g \frac{h^2}{2} + P_0 h$$

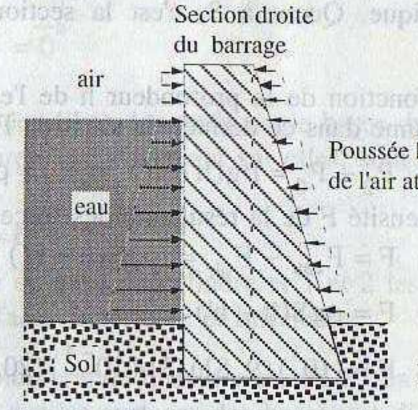
Les forces qui s'exerce sur le barrage sont celle de l'eau et celle de l'air atmosphérique. Comme la composante horizontale de la poussée de l'air est antagonistes à celle de l'eau, l'intensité F_1 de la force de poussée qui s'exerce sur le barrage et par mètre de largeur est alors:

$$F_1 = F - F_{air} = F - P_0 S = F - P_0 hL = F - P_0 h$$

soit: $F_1 = \rho g \dfrac{h^2}{2}$

A.N: $F_1 \approx 10^3 (Kg/m^3) 10 (m/s^2) \dfrac{(20\,(m))^2}{2} = 2\,10^6\ (N) = 2\,10^5\ (Kgp)$

3°- La force de poussée, s'exerçant sur un élément de surface dS=Ldz, est proportionnelle à la profondeur z (Cf. question 2). Aussi, pour faire face à cette poussée, on construit une barrière dont l'épaisseur est proportionnelle à la profondeur z Fig(4); d'où la forme trapézoïdale de la section droite du barrage.



Fig(4)

SOLUTION DE L'EXERCICE N°1.3

1°- Comme le volume V d'une hauteur h de liquide, contenu dans une branche verticale de section S, s'exprime par :

$$V = S\,h \qquad (1)$$

Les hauteurs h_a et h_b d'eau dans les branches (A) et (B) se déduisent de la relation (1) comme suit:

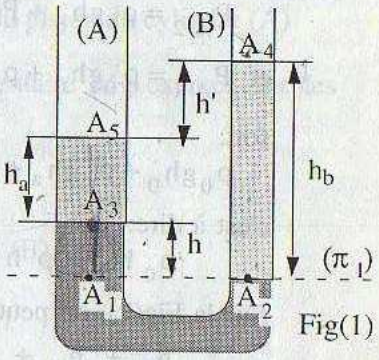
$$h_a = \frac{V_A}{S_A} = \frac{20\ (cm^3)}{4\ (cm^2)} = 5\ (cm)$$

et: $$h_b = \frac{V_B}{S_B} = \frac{30\ (cm^3)}{2\ (cm^2)} = 15\ (cm)$$

2°- Le plan horizontal (π_1) de la Fig(1) est isobare puisque les points A_1 et A_2 de (π_1) appartiennent au même liquide sans discontinuité. On a donc:

$$P_{A1} = P_{A2}$$

La relation fondamentale de l'hydrostatique, appliquée aux plans horizontaux passant par (A_5 et A_3), (A_3 et A_1) et (A_2 et A_4), s'écrit:



Fig(1)

Pour (A_5 et A_3):

$$P_{A3} - P_{A5} = \rho_e g h_a \qquad (2)$$

Pour (A_3 et A_1)

$$P_{A1} - P_{A3} = \rho_0 g h \qquad (3)$$

Pour (A_4 et A_2)

$$P_{A2} - P_{A4} = \rho_e g h_b \qquad (4)$$

Or la pression s'exerçant sur les surfaces libres de l'eau; c'est à dire en A_5 et en A_4, est celle de l'air atmosphérique, P_0. On a donc:

$$P_{A5} = P_{A4} = P_0$$

En remplaçant P_{A5} et P_{A4} par P_0 dans les équations (2) et (4), on obtient:

$$P_{A3} = \rho_e g h_a + P_0 \qquad (2')$$

et: $$P_{A2} = \rho_e g h_b + P_0 = P_{A1} \qquad (4')$$

En remplaçant dans l'équation (3) P_{A1} et P_{A3} par leurs expressions (2') et (4'), On obtient :

$$\rho_e g h_b + P_0 - \rho_e g h_a - P_0 = \rho_0 g h$$

soit: $\rho_e (h_b - h_a) = \rho_0 h$

D'où la dénivellation h entre les deux niveaux de mercure.

$$h = \frac{\rho_e}{\rho_0}(h_b - h_a) = \frac{1}{13,6}(15 - 5) \approx 0,73\ (cm)$$

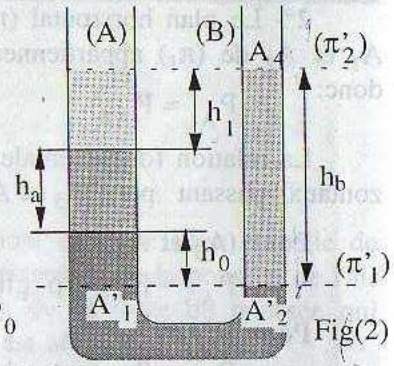
La dénivellation h' entre les deux surfaces libres de l'eau est telle que (Cf.Fig(1)): $h' + h_a + h = h_b$

D'où: $h' = h_b - h_a - h \approx 9,27\ (cm)$

3°- Si h_1, est la hauteur de la colonne d'huile versée dans la branche (A), son volume, V', sera:

$V' = S_A h_1$

En exprimant les pressions aux points (A'_1) et (A'_2) du plan horizontal (π'_1), par application de la relation fondamentale de l'hydrostatique (comme précédemment), on obtient:



Fig(2)

$$P_{A'2} = \rho_e g h_b + P_0$$

et: $$P_{A'1} = \rho_0 g h_0 + \rho_e g h_a + \rho' g h_1 + P_0$$

soit:

$$\rho_0 g h_0 + \rho_e g h_a + \rho' g h_1 + \cancel{P_0} = \rho_e g h_b + \cancel{P_0} \quad , \quad P_{A'1} = P_{A'2}$$

c'est à dire:

$$\rho_0 h_0 + \rho' h_1 = \rho_e (h_b - h_a) \qquad (5)$$

Sur la Fig(2), on peut remarquer que:

$$h_0 + h_a + h_1 = h_b \qquad (6)$$

La résolution des équations (5) et (6) permet de déterminer la hauteur h_1 de la colonne d'huile, soit:

$$h_1 = \frac{\rho_0 - \rho_e}{\rho_0 - \rho'} (h_b - h_a)$$

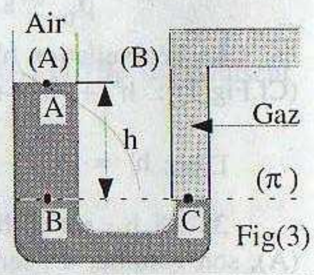
Le volume V' d'huile qu'il faut verser dans la branche (A) est donc:

$$V' = S_A \frac{\rho_0 - \rho_e}{\rho_0 - \rho'} (h_b - h_a) = 4 \frac{(13,6 - 1)}{(13,6 - 0,8)} (15 - 5) \approx 39,37 \ (cm^3)$$

4°- Les pressions qui s'exercent sur les surfaces libres du mercure sont P (pression du gaz dans le réservoir) dans la branche (B) et P_0 dans la branche (A). la relation fondamentale de l'hydrostatique, appliquée aux points A et B du liquide Fig(3), s'écrit:

$$P_B - P_A = \rho_0 g h_0$$

Comme les points C et B, appartiennent au même liquide et sont dans un même plan horizontal (π), les pressions en ces points sont égales. On a donc:



Fig(3)

$$P = P_C = P_B \quad \text{et} \quad P_A = P_0$$

D'où la pression P du gaz dans le réservoir.

$$P = \rho_0 g h_0 + P_0 \approx 1,0674\ 10^5 \ (N/m^2)$$

SOLUTION DE L'EXERCICE N° 1.4

D'après le théorème de Pascal, toute surpression ΔP en un point d'un liquide en équilibre entraîne la même surpression ΔP en tout ses points. Comme la surpression ΔP produite par $\vec{f_0}$ est:

$$\Delta P = \frac{f_0}{S_A} \quad , \quad S_A \text{ étant la section du piston du cylindre (A)}$$

l'intensité de la force de pression supplémentaire $\vec{\Delta F}$, exercée sur les pistons du cylindre B, est alors:

$$\Delta F = \Delta P\, S_B = \left(\frac{f_0}{S_A}\right) S_B = \left(\frac{S_B}{S_A}\right) f_0$$

où: S_B est la section des pistons du cylindre (B).

A.N: $$\Delta F = \frac{7,065\ (cm^2)}{0,785\ (cm^2)}\ 50\ (N) \approx 450\ (N)$$

Comme la force $\vec{\Delta F}$ ne dépend que de la surpression ΔP et que celle ci est la même en tout point du liquide, quelque soient les positions des cylindres (A) et (B), le résultat ne dépend donc pas de la position du maître cylindre (A), par rapport au cylindre récepteur (B).

SOLUTION DE L'EXERCICE N° 1.5

1°- Comme les cylindres communiquent par leurs bases, les surfaces libres du liquide sont dans un même plan horizontal; il s'en suit que les hauteurs des colonnes d'huile dans les cylindres sont les mêmes. Soit h leur valeur commune. Le volume de liquide contenu dans le tuyau de liaison étant négligeable, le volume d'huile V_0 versé est donc égal à la somme des volumes d'huile, contenue dans les deux cylindres; soit:

$$V_0 = \pi \frac{D^2}{4} h + \pi \frac{d^2}{4} h$$

D'où la hauteur h des colonnes d'huile dans les deux cylindres.

$$h = \frac{4V_0}{\pi(D^2 + d^2)} = \frac{4\,(20110^3)\ (cm^3)}{3,14\,(50,5^2 + 5,05^2)\ (cm^2)} \approx 99,40\ (cm)$$

2.1- La pression P de l'huile sous le petit piston est due à l'air atmosphérique et au poids du piston. Elle est donc égale à:

$$P = \frac{|\vec{mg}|}{s} + P_0 = \frac{\rho s h_1 g}{s} + P_0 = \rho h_1 g + P_0$$

soit: $P = 7,8\,10^3.10.5.10^{-2} + 10^5 \approx 1,03910^5 \ (N/m^2)$

2.2- La hauteur h de dénivellation entre les deux niveaux de liquide est telle que (Cf. Ex. n°1.4):

$$P = P_0 + \rho_h g h = \rho g h_1 + P_0$$

soit: $h = \frac{\rho}{\rho_h} h_1 = \frac{7,8}{0,9} 5 \approx 43,33$ (cm)

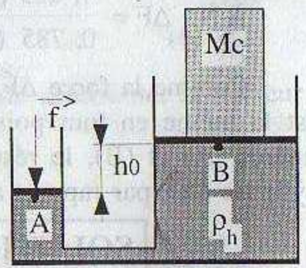
2.3 - Pour que les deux niveaux d'huile soient dans un même plan horizontal, il faudrait que les pressions de l'huile, sous les deux pistons, soient les mêmes; c'est à dire égale à P. Comme la pression de l'huile sous le grand piston est également due au poids du piston et à l'air atmosphérique, on peut donc écrire:

$$P = \frac{\|\overrightarrow{Mg}\|}{S} + P_0 = \frac{\rho S h_2 g}{S} + P_0 = \rho h_2 g + P_0$$

soit: $\rho h_1 g + P_0 = \rho h_2 g + P_0$

D'où l'épaisseur h_2 du grand piston.

$h_2 = h_1 = 5$ (cm)



3.1- Quand la charge est soulevée de h_0=1 (m), les pressions de l'huile sous les pistons, P_A et P_B, sont telles que (Cf. Figure ci-contre):

$$P_A - P_B = \rho_h g h_0$$

avec: $P_A = \frac{\|\vec{f}\|}{s} + \left(\frac{\|\overrightarrow{mg}\|}{s} + P_0\right) = \frac{\|\vec{f}\|}{s} + (P_0 + \rho g h_1)$

et: $P_B = \frac{\|\overrightarrow{M_c g}\|}{S} + \left(\frac{\|\overrightarrow{Mg}\|}{S} + P_0\right) = \frac{\|\overrightarrow{M_c g}\|}{S} + (P_0 + \rho g h_2)$

En remplaçant P_A et P_B par leur expressions, on obtient:

$$\frac{\|\vec{f}\|}{s} + (\cancel{P_0 + \rho g h_1}) - \frac{\|\overrightarrow{M_c g}\|}{S} - (\cancel{P_0 + \rho g h_2}) = \rho_h g h_0$$

soit: $\frac{\|\vec{f}\|}{s} = \rho_h g h_0 + \frac{\|\overrightarrow{M_c g}\|}{S}$

D'où l'intensité de la force que doit exercer l'opérateur.

$$\|\vec{f}\| = \rho_h g h_0 s + \frac{s}{S}\|\overrightarrow{M_c g}\| \approx 268 \ (N)$$

3.2- Si le petit cylindre est mis en communication avec un compresseur d'air, la pression P'_0 qu'il doit fournir, pour soulever la voiture de 1 (m), doit compenser la pression atmosphérique P_0 et celle due à l'effort $\vec{f}$ de l'opé-

rateur; soit:

$$P'_0 = P_0 + \frac{\|\vec{f}\|}{s} = 10^5 + \frac{268}{\frac{3,14}{4}(5,05\,10^{-2})^2} \approx 2,34 \ (atm)$$

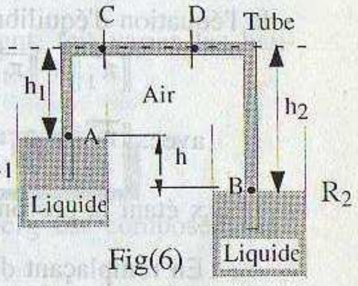
SOLUTION DE L'EXERCICE N° 1.6

Après avoir enlevé les bouchons des extrémités du tuyau, considérons un élément de volume du liquide, compris entre les sections droites C et D Fig(6). La relation fondamentale de l'hydrostatique, appliquée aux points se trouvant sur le même plan horizontal des sections C et D, de l'éléments de volume du liquide, et les points A et B du liquide (Fig(6), s'écrit:

$$P_A - P_C = \rho g h_1 \quad (1)$$

et $P_B - P_D = \rho g h_2 = \rho g(h_1 + h) \quad (2)$

avec: $P_A=P_B=P_0$.



Fig(6)

En retranchant membre à membre les équations (2) et (1), on obtient:

$$P_C - P_D = \rho g(h_2 - h_1) = \rho g(h)$$

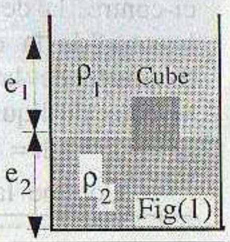
Le résultat ci-dessus montre que les pressions dans les sections C et D sont différentes, chaque fois qu'il y a une dénivellation entre les niveaux de liquide dans les réservoirs R_1 et R_2. Suivant l'axe du tuyau, l'élément de volume du liquide est donc soumis aux forces de pression dont la résultante est $(P_C-P_D)dS=\rho g dS(h_2-h_1)$; il en résulte l'écoulement du liquide d'un réservoir vers l'autre; soit:

- Le liquide s'écoule de R_1 vers R_2 si $h_2-h_1>0$.
- Le liquide s'écoule de R_2 vers R_1 si $h_2-h_1<0$.
- Le liquide reste stable quand $h_2-h_1=0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE N° 1.7

1°- La masse volumique moyenne ρ_0 du corps est:

$$\rho_0 = \frac{m}{a^3} = \frac{7\,10^3 \ (g)}{(20)^3 \ (cm^3)} = 0,875 \ (g/cm^3)$$

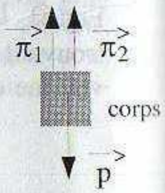


Fig(1)

2°- Dans un liquide, la flottabilité d'un corps est liée à sa masse volumique moyenne: si elle est inférieure à celle du liquide, il flotte; si elle est supérieure il s'enfonce dans le liquide. Dans notre cas, $\rho_0 > \rho_1$ et $\rho_0 < \rho_2$. Donc, le corps va se retrouver au fond du liquide (1) et partiellement immergé dans le liquide (2), comme indiqué sur la Fig(1).

2.1- Comme la poussée d'Archimède, exercée par un liquide sur le corps, est égale et opposée au poids du volume de liquide qu'il déplace, on doit donc commencer par déterminer les volumes des liquide, (1) et (2), déplacé par le corps.

Le corps étant en équilibre, sous l'action de son poids $\vec{p}$ et des forces de poussée des liquides, $\vec{\pi}_1$ et $\vec{\pi}_2$, on peut donc écrire:



$$\vec{p} + \vec{\pi}_1 + \vec{\pi}_2 = \vec{0}$$

Comme les forces sont toutes verticales, après projection de l'équation d'équilibre sur un axe vertical, on aboutit à:

$$\|\vec{\pi}_1\| + \|\vec{\pi}_2\| = \|\vec{p}\| \qquad (1)$$

avec: $\|\vec{\pi}_1\| = \rho_1 a^2(a - x)g$, $\|\vec{\pi}_2\| = \rho_2 a^2 x g$ et $\|\vec{p}\| = \rho_0 a^3 g$

x étant la profondeur d'immersion du cube dans le liquide (2).

En remplaçant dans l'équation (1) p, π_1 et π_2 par leurs expressions, on obtient:

$$\rho_1(a - x)\cancel{a^2 g} + \rho_2 x \cancel{a^2 g} = \rho_0 a \cancel{a^2 g}$$

D'où la profondeur x d'immersion du cube dans le liquide (2).

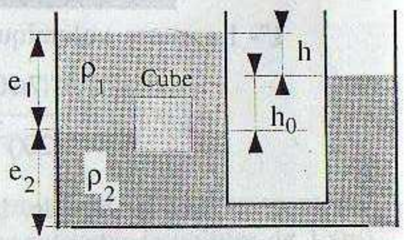
$$x = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} a = \frac{0,875 - 0,8}{1 - 0,8} 20 \text{ (cm)} = 7,5 \text{ (cm)}$$

Les intensités des poussées exercées par les liquide sur le corps sont alors:

$$\|\vec{\pi}_1\| = \rho_1 a^2(a - x)g = 0,8\,10^3(0,2)^2(0,2 - 0,075)10 = 40 \text{ (N)}$$

et: $$\|\vec{\pi}_2\| = \rho_2 a^2 x g = 10^3(0,2)^2(0,075)10 = 30 \text{ (N)}$$

3.1- Comme le montre la figure ci-contre, la dénivellation h est égale à la hauteur de la colonne du liquide (1), e_1, diminuée de la dénivellation h_0 des deux niveaux du liquide (2); soit:



$$h = e_1 - h_0$$

Comme la pression en tout point du

liquide (2), se trouvant dans le plan horizontal et contenant l'interface des deux liquides, est la même, on peut écrire (Cf. Sol. Ex. n°1.3. Question 3°):

$$P_0 + \rho_1 g e_1 = P_0 + \rho_2 g h_0$$

D'où la dénivellation h0.

$$h_0 = \frac{\rho_1}{\rho_1} e_1 = \frac{0,8}{1} 15 \text{ (cm)} = 12 \text{ (cm)}$$

La dénivellation h est alors:

$$h = e_1 - h_0 = 15 \text{ (cm)} - 12 \text{ (cm)} = 3 \text{ (cm)} \qquad (2)$$

3.1- Comme le montre la relation (2), la dénivellation ne dépend pas du bloc et de sa position.

Remarque: la présence du corps a, certainement, fait varier les hauteurs initiales des liquides, (1) et (2), dans le récipient.

SOLUTION DE L'EXERCICE N° 1.8

1°- La poussée d'Archiméde $\vec{\pi}$ qui s'exerce sur l'iceberg est composée des poussées dues à l'eau et à l'air; soit:

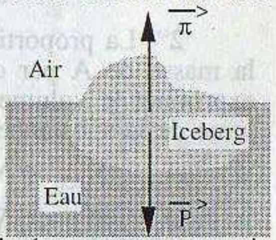
$$\vec{\pi} = \vec{\pi}_{eau} + \vec{\pi}_{air}$$

où: $\vec{\pi}_{eau} = -\rho_e V_i \vec{g}$ et $\vec{\pi}_{air} = -\rho_a V_e \vec{g}$

V_i et V_e sont, respectivement, les volumes d'eau et d'air déplacés par l'iceberg (le volume V_0 de l'iceberg est donc: $V_0 = V_e + V_i$).

soit: $\vec{\pi} = -(\rho_e V_i + \rho_a V_e)\vec{g} = -[(\rho_e - \rho_a)V_i + \rho_a V_0]\vec{g}$

2°- L'iceberg est en équilibre sur l'eau de mer sous l'action de son poids $\vec{P}$ et de la poussée d'Archimède $\vec{\pi}$; on a donc:



$$\vec{P} + \vec{\pi} = \vec{0}$$

soit: $\rho_g V_0 \vec{g} - (\rho_e V_i + \rho_a V_e)\vec{g} = \vec{0}$

ρ_g étant la masse volumique de la glace.

Comme $V_0 = V_i + V_e$, l'expression précédente, projetée sur un axe vertical, s'écrit également comme suit:

$$\rho_g V_0 - (\rho_e V_i + \rho_a (V_0 - V_i)) = 0$$

soit: $(\rho_g - \rho_a)V_0 = (\rho_e - \rho_a) V_i$

Les volumes immergé et émergé de l'iceberg sont donc:

$$V_i = \frac{\rho_g - \rho_a}{\rho_e - \rho_a} V_0 \quad \text{et} \quad V_e = \frac{\rho_e - \rho_g}{\rho_e - \rho_a} V_0$$

D'où les rapports des volumes immergé et émergé.

$$\frac{V_i}{V_e} = \frac{\rho_g - \rho_a}{\rho_e - \rho_g}$$

$$\text{A.N: } \frac{V_i}{V_e} = \frac{0,92 - 0,0013}{1,03 - 0,92} \approx \frac{0,92}{0,11} = 8,4$$

Remarque: le volume immergé est environ 8 fois plus important que le volume émergé.

SOLUTION DE L'EXERCICE N° 1.9

1°- La masse volumique moyenne ρ_{moy} de l'échantillon est telle que:

$$\rho_{moy} = \frac{m_{ech}}{V_{ech}}$$

où: m_{ech} et V_{ech} sont respectivement la masse et le volume de l'échantillon.

Le volume de l'échantillon se déduit des niveaux d'eau dans l'éprouvette; soit:

$$V_{ech} = V_2 - V_1 = 133,3\,(cm^3) - 100\,(cm^3) = 33,3\,(cm^3)$$

D'où la la valeur de la masse volumique moyenne.

$$\rho_{moy} = \frac{330\,(g)}{33,3\,(cm^3)} \approx 9,9\,(g/cm^3)$$

2°- La proportion de la substance A dans l'échantillon est le rapport de la masse de A par celle de l'échantillon. A partir des équations ci-dessous, exprimant le volume et la masse de l'échantillon, On peut déterminer le volume de la substance A; soit:

$$V_{ech} = V_A + V_B \qquad (1)$$

$$\text{et} \quad m = \rho_A V_A + \rho_B V_B = \rho_{moy} V_{ech} \qquad (2)$$

En remplaçant dans (2) V_B par son expression en fonction de V_{ech} et de V_A, tirée de (1), on trouve:

$$\rho_{moy} V_{ech} = \rho_A V_A + \rho_B (V_{ech} - V_A)$$

D'où l'expression donnant le volume de la substance A.

$$V_A = \frac{\rho_{moy} - \rho_B}{\rho_A - \rho_B} V_{ech}$$

La proportion de A dans l'échantillon est alors:

$$\frac{m_A}{m_{ech}} = \frac{\rho_A V_A}{\rho_{moy} V_{ech}} = \left(\frac{\rho_A}{\rho_{moy}}\right)\left(\frac{\rho_{moy} - \rho_B}{\rho_A - \rho_B}\right)$$

$$\text{A.N: } \frac{m_A}{m_{ech}} = \left(\frac{19,5}{9,9}\right)\left(\frac{9,9 - 8,94}{19,5 - 8,94}\right) \approx 0,18 = 18\%$$

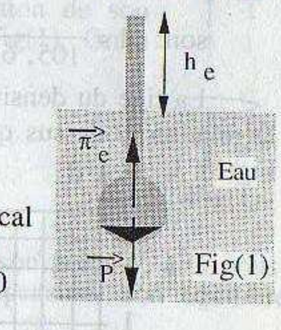
L'échantillon est donc composé de 18%, environ, de la matière de la substance A et 82% de celle de B.

SOLUTION DE L'EXERCICE N° 1.10

1°- Dans l'eau et dans l'alcool, le densimètre est en équilibre sous l'action de son poids $\vec{P}$ et de la poussée d'Archiméde $\vec{\pi}$.

En négligeant la poussée d'Archiméde de l'air devant celle du liquide, On peut écrire:

Dans le cas de l'eau Fig(1):



Fig(1)

$$\vec{P} + \vec{\pi}_e = \vec{0} \qquad (1)$$

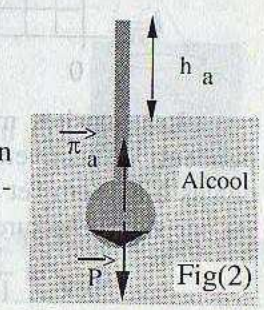
$$\text{avec: } \vec{\pi}_e = -\rho_e (V_0 - sh_e)\vec{g}$$

La projection de l'équation (1) sur un axe vertical donne:

$$-P + \pi_e = 0 \Leftrightarrow -P + \rho_e (V_0 - sh_e) g = 0$$

$$\text{soit: } \quad P = \rho_e (V_0 - sh_e) g \qquad (2)$$

Dans le cas de l'alcool Fig(2):



Fig(2)

$$\vec{P} + \vec{\pi}_a = \vec{0} \qquad (3)$$

$$\text{avec: } \vec{\pi}_a = -\rho_a (V_0 - s\,h_a)\vec{g}$$

Comme précédemment, la projection de l'équation (3) sur un axe vertical permet d'arriver au résultat suivant:

$$P = \rho_a (V_0 - sh_a) g \qquad (4)$$

Les équations (2) et (4), permettent d'écrire:

$$\rho_a(V_0 - sh_a)g = \rho_e(V_0 - sh_e)g$$

D'où l'expression donnant la masse volumique de l'alcool.

$$\rho_a = \frac{(V_0 - sh_e)}{(V_0 - sh_a)}\rho_e \qquad (5)$$

$$\text{A.N:}\ \rho_a = \frac{105,6 - (1,6)(16)}{105,6 - (1,6)(2)}1(g/cm^3) \approx 0,78\,(g/cm^3)$$

2°- Considérons un liquide x tel que: lorsque le densimètre précédent est plongé dans ce dernier, sa partie sphérique immerge complètement et sa partie cylindrique partiellement. La relation (5) lui est donc applicable. Si ρ_x et h_x sont, respectivement, sa masse volumique et la hauteur émergée de la tige du densimètre, la relation en question s'écrit:

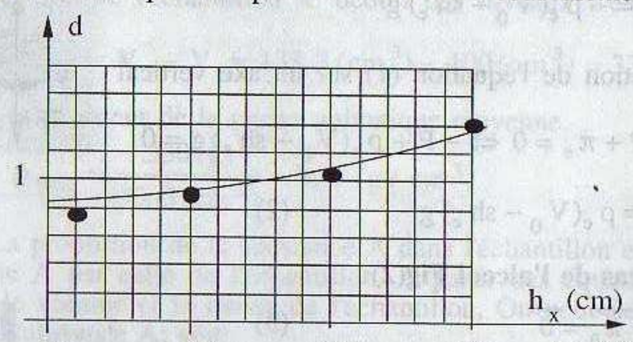
$$\rho_x = \frac{(V_0 - sh_e)}{(V_0 - sh_x)}\rho_e$$

La densité d du liquide x est alors:

$$d = \frac{\rho_x}{\rho_e} = \frac{105,6 - (1,6)(16)}{105,6 - 1,6h_x},$$

$$\text{soit:}\ d = \frac{80}{105,6 - 1,6h_x} \qquad (6)$$

La tige du densimètre doit donc se graduer en densité d conformément la relation ci-dessus que l'on peut aussi traduire sous forme d'un graphique Fig(3).



Fig(3)

Les densités maximale et minimale, mesurables par l'appareil, correspondent, respectivement, aux hauteurs, émergées de la tige du densimètre, égales à 30 (cm) et 0 (cm). On peut donc les déterminer par la relation (6) ou par simple lecture sur le graphe de la Fig(3); soit:

$$d_{max} = \frac{80}{105,6 - (1,6)(30)} \approx 1,39 \quad \text{ou} \quad d_{max} \approx 1,4$$

$$\text{et} \quad d_{min} = \frac{80}{105,6} \approx 0,76 \quad \text{ou} \quad d_{min} \approx 0,75$$

D'où la plage des densités mesurables par cet appareil: $0,75 \leq d \leq 1,4$.

Remarque: En gramme par centimètre cube (g/cm^3) ou en kilogramme par litre (Kg/l), la masse volumique du liquide x correspond exactement à la lecture effectuée sur le densimètre puisque celle de l'eau vaut l'unité.

SOLUTION DE L'EXERCICE N° 1.11

La poussée d'Archiméde de l'air étant négligeable devant celle des liquides, nous l'avons négligée dans tout l'exercice. On a également négligé le poids et les volumes des fils de suspension de la spire.

1°- Pour savoir de quel côté la balance se penche, il faut comparer les valeurs T' (dans l'eau) et T (dans l'air) des tensions du fil de suspension de la spire: si T' est inférieure à T, la balance se penche du côté de la tare; dans le cas contraire, elle se penche du côté de la spire.

Dans l'air, la spire est en équilibre sous l'action de son poids $\vec{P}$ et de la tension $\vec{T}$ du fil de suspension Fig(1). On a donc:

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\text{soit:}\ T = P = m_0 g$$

où m_0 est à la tare.

Fig(1)

Dans le liquide Fig(2), la spire est soumise à son poids $\vec{P}$, à la poussée d'Archiméde $\vec{\pi}$ et à la tension $\vec{T'}$ du fil de suspension. Son équilibre s'écrit donc comme suit:

$$\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{T'} = \vec{0} \qquad (1)$$

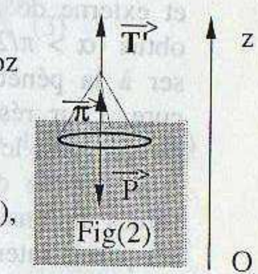
La projection de la relation (1) sur un axe vertical oz donne:

$$P - \pi - T' = 0$$

$$\text{soit:}\ T' = P - \pi \qquad (2)$$

En remplaçant P par sa valeur T dans l'équation (2), on trouve:

$$T' = T - \pi$$

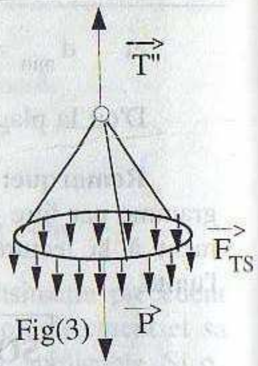


Fig(2)

Comme π est positif, T' est inférieure à T. Donc la balance penchera du côté de la tare.

2°- A l'extraction, c'est à dire lorsque la spire est seulement en contact avec le liquide, la spire est soumise à son poids $\vec{P}$, à la tension $\vec{T''}$ de son fil de suspension et aux forces de tension superficielle dont la résultante est $\vec{F}_{TS}$ Fig(3). Avant la rupture d'équilibre, on a donc:

$$\vec{P} + \vec{F}_{TS} + \vec{T''} = \vec{0} \qquad (3)$$



Fig(3)

La projection de l'équation (3) sur un axe vertical donne:

$$T'' = P + F_{TS} \qquad (4)$$

Comme l'équilibre est assuré par la tare m_0 et une masse m=0,71 (g), on a aussi:

$$T'' = (m_0 + m)\, g \qquad (5)$$

Des équations (4) et (5), on tire l'intensité F_{TS} de la résultante des forces de tension superficielle; soit:

$$F_{TS} = (m_0 + m)\, g - P = mg$$

Le mouillement étant parfait (α=0), l'intensité de la résultante des forces de tension superficielle s'écrit:

$$F_{TS} = 2\pi R A \cos(\alpha) = 2\pi R A$$

D'où la valeur de la constante A de tension superficielle du liquide.

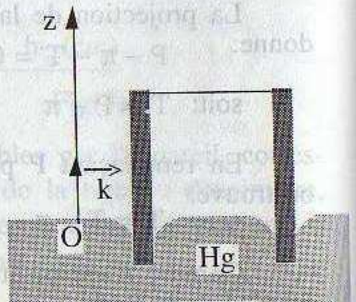
$$A = \frac{mg}{2\pi R} = \frac{(0,71\,10^{-3})(9,81)}{(6,28)(2,5\,10^{-2})} \approx 44\,10^{-3} \ \text{(N / m)}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE N° 1.12

1°- Les forces de tension superficielle s'exercent sur les parois interne et externe de l'anneau. Comme l'angle α, caractérisant le mouillement, est obtus ($\alpha > \pi/2$) Fig(1), ces forces vont s'opposer à la pénétration de l'anneau dans le mercure. Leur résultante est donc verticale et est dirigée vers le haut; son intensité F_{TS} est égale à la somme des intensités des résultantes des forces de tension superficielle qui s'exercent sur les parois interne et externe, soit:

$$F_{TS} = F^{i}_{TS} + F^{e}_{TS}$$

avec: $F^{i}_{TS} = 2\pi R_i A|\cos(\alpha)|$



Fig(1)

et $F^{e}_{TS} = 2\pi R_e A|\cos(\alpha)|$

A étant la constante de tension superficielle du mercure.

D'ou l'intensité de la résultante des forces de tension superficielle.

$$F_{TS} = 2\pi(R_i + R_e)\, A\,|\cos(\alpha)|$$

A.N: $F_{TS} = 6,28\,(9,5 + 10,5)10^{-2}\, 0,45\, |\cos(120°)| \approx 28,26\,10^{-2}$ (N)

La résultante des forces de tension superficielle $\vec{F}_{TS}$ s'écrit donc:

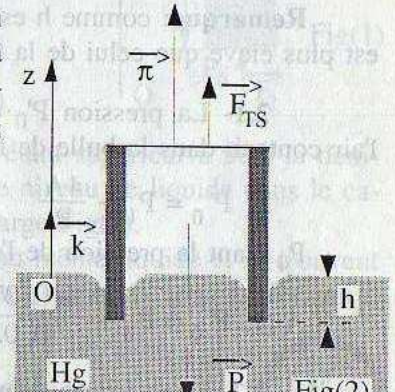
$$\vec{F}_{TS} = 28,26\,10^{-2}\,\vec{k}$$

2°- Dans le mercure, l'anneau est en équilibre sous l'action de son poids $\vec{P}$, de la poussée d'Archiméde $\vec{\pi}$ et des forces de tension superficielle dont la résultante est $\vec{F}_{TS}$ Fig(2). Son équation d'équilibre s'écrit:

$$\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{F}_{TS} = \vec{0} \qquad (1)$$

La projection de l'équation (1 vertical Oz donne:

$$-P + \pi + F_{TS} = 0 \qquad (2)$$



Fig(2)

avec: $P = \rho\,\pi(R_e^2 - R_i^2)\,H g$

et $\pi = \rho_{Hg}\,\pi(R_e^2 - R_i^2)\,h\,g$

En remplaçant P et π par leur tient:

$$-\rho\,\pi(R_e^2 - R_i^2)Hg + \rho_{Hg}\,\pi(R_e^2 - R_i^2)\,h\,g + F_{TS} = 0$$

D'où la profondeur d'immersion h de l'anneau.

$$h = \frac{\rho}{\rho_{Hg}} H - \frac{F_{TS}}{\rho_{Hg}\,\pi(R_e^2 - R_i^2)\,g} \qquad (3)$$

A.N:

$$h = \frac{2,6}{13,6}\, 0,1 - \frac{28,26\,10^{-2}}{13,6\,10^{3}\; 3,14(10,5^2 - 9,5^2)10^{-4}\; 9,81} \approx 1,87\,10^{-2} \ \text{(m)}$$

soit: $h \approx 1,87$ (cm

3°- Si les forces de tension superficielle étaient négligeables, c'est à dire $\vec{F}_{TS}=\vec{0}$ (N), la profondeur d'immersion h' de l'anneau sera, d'après la relation (3):

$$h' = \frac{\rho}{\rho_{Hg}} H = \frac{2,6}{13,6} 10\ (cm) \approx 1,91\ (cm)$$

SOLUTION DE L'EXERCICE N° 1.13

1°- La dénivellation h s'obtient par application de la loi de Jurin à la branche capillaire du tube, soit:

$$h = \frac{2A\cos(\alpha)}{\rho_0 g r}$$

$$\text{A.N:}\ h = \frac{2(0,072)\cos(30°)}{(10^3)(9,81)(10^{-3})} \approx 0,0127\ (m) = 12,7\ (mm)$$

Remarque: comme h est positif, le niveau du liquide dans le capillaire est plus élevé que celui de la branche large.

2.1- La pression P'_0 de l'air dans le capillaire est égale à celle de l'air contenu dans la bulle de liquide; soit:

$$P'_0 = P_0 + \frac{4A}{R} \qquad \text{(Cf. cours)}$$

P_0 étant la pression de l'air à l'extérieur de la bulle.

$$\text{A.N:}\ P'_0 = P_0 + \frac{4(0,072)}{0,02} \approx P_0 + 14,4\ (N/m^2)$$

2.2- Dans le capillaire, la surpression ΔP sur la surface libre du liquide entraînera une une baisse de la dénivellation initiale de h_1 telle que:

$$\Delta P = P'_0 - P_0 = \rho_0 g h_1$$

$$\text{soit:}\ h_1 = \frac{\Delta P}{\rho_0 g} = \frac{14,4}{10^3 9,81} \approx 1,47.10^{-3}\ (m) = 1,47\ (mm)$$

La dénivellation h' entre les deux niveaux de liquide sera donc:

$$h' = h - h_1$$

$$\text{soit:}\ h' = 12,7\ (mm) - 1,47\ (mm) = 11,23\ (mm)$$

2ème méthode

L'équilibre de la colonne de liquide, dans le capillaire et en sur élévation Fig(1), s'écrit:

$$\vec{P} + \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_{TS}} = \vec{0} \qquad (1)$$

$\vec{P}$, $\vec{F_{TS}}$, $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ sont, respectivement, le poids de la colonne de liquide, la résultante des forces de tension superficielle et les résultantes des forces de pression, s'exerçant sur les surfaces supérieur et inférieure de la colonne de liquide.

La projection de (1) sur l'axe vertical Oz donne:

$$-P - F_1 + F_2 + F_{TS} = 0 \qquad (2)$$

avec: $P = \rho_0 \pi r^2 h' g$, $F_1 = P'_0 \pi r^2$, $F_2 = P_0 \pi r^2$ et $F_{TS} = 2\pi r A\cos(\alpha)$

En remplaçant dans l'équation (2) P, F_{TS}, F_1 et F_2 par leurs expressions, on obtient:

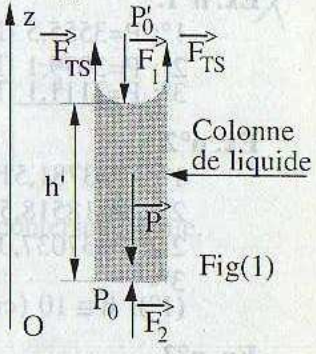
$$-\rho_0 \pi r^2 h' g + 2\pi r A\cos(\alpha) - (P'_0 - P_0)\pi r^2 = 0$$

$$\text{soit:}\ -\rho_0 r h' g + 2A\cos(\alpha) - (\Delta P) r = 0$$

D'où l'expression donnant la dénivellation h'.

$$h' = \frac{2A\cos(\alpha)}{\rho_0 r g} - \frac{\Delta P}{\rho_0 g}$$

c'est à dire le résultat précédent (h'=h-h$_1$).



Fig(1)

3°- L'angle caractérisant le mouillement étant supérieur à 90°, la dénivellation se fera vers le bas; c'est à dire que le niveau de liquide dans le capillaire sera plus bas que celui de la branche large Fig(2).

Comme les points B et C appartiennent au même liquide et se trouvent dans un même plan horizontal, les pression en ces points sont égales; on a donc:

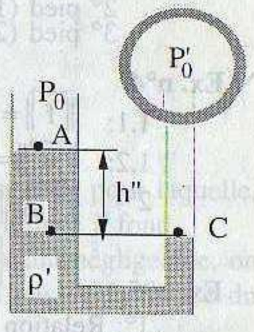
$$P_B = P_C$$

La relation fondamentale de l'hydrostatique, appliquée au liquide et aux points A et B, permet d'exprimer la pression P_B en fonction de h'', de r' et de P_0; soit:

$$P_B - P_A = \rho' g h'' \Rightarrow P_B = \rho' g h'' + P_0$$

La pression au point C est due, à la fois, à la pression P'0 et aux forces de tension superficielles; on peut donc l'exprimer comme suit:

$$P_C = P'_0 + \frac{F_{TS}}{\pi r^2} = P_0 + \Delta P + \frac{F_{TS}}{\pi r^2}$$



Fig(2)

où: $F_{TS} = |2\pi r A'\cos(\alpha')|$

En exprimant l'égalité des pressions aux points B et C et après simplification, on obtient:

$$\rho' g h'' = \Delta P + \frac{F_{TS}}{\pi r^2}$$

D'où l'expression et la valeur numérique de la masse volumique ρ' du liquide.

$$\rho' = \frac{\Delta P}{g h''} + \frac{2A'|\cos(\alpha')|}{g h'' r} \approx 40,77 + 807 \approx 848\ (Kg/m^3) \approx 0,85\ (g/cm^3)$$

Pression et forces de pression

Ex. n°1.

1°: $P=3555,5\ (N/m^2)$
2°: $P=3079,1\ (N/m^2)$
3°: $P=3111,1\ (N/m^2)$

Ex. n°2.

1°: $P=3781,51\ (N/m^2)$
2.1: $P=18518,51\ (N/m^2)$
2.2: $P=37037,03\ (N/m^2)$
3°-
(1°): $h \cong 10\ (cm)$, (2.1): $h \cong 25\ (cm)$ et (2.2): $h \cong 50\ (cm)$.

Ex. n°3.

1°: $V=1130,40\ (cm^2)$ et $p=153,73\ (N)$
2.1:
2.2: $P \cong 1,36\,10^4\ (N/m^2)$
3°- $P \cong 1,18\,10^4\ (N/m^2)$
1° pied ($1\ cm^2$): $P \cong 61,24\,10^4\ (N/m^2)$
2° pied ($1,5\ cm^2$): $P \cong 40,83\,10^4\ (N/m^2)$
3° pied ($2\ cm^2$): $P \cong 30,62\,10^4\ (N/m^2)$

Ex. n°4.

1.1: $\|\overrightarrow{f}\| = 20\ (N)$
1.2: $\|\overrightarrow{R}\| = 10\ (N)$
2°- $\|\overrightarrow{f_{op}}\| = 10\ (N)$

Lois de l'hydrostatique et applications

Ex. n°5.

1°: Relation fondamentale de l'hydrostatique (Cf. cours).
2°: P=21 (atm).

Ex. n°6.

1°: $\|\overrightarrow{F}\| \approx 211,95\,10^3\ (N) = 21,195\ (t_f)$. La force F est perpendiculaire à l'hublot et est dirigée vers l'intérieur du sous marin.
2°: h= 608,63 (m).

Ex. n°7. La force F a une intensité de 833,33 (N); elle est perpendiculaire à la paroi et est dirigée vers l'extérieur du vase.

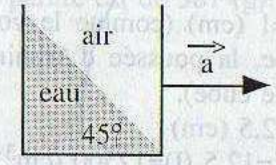
Ex. n°8: 1°: $F_{vanne}=5853\ (N)$; 2°: $F_{barage}=2\,10^6\ (N)$.

Ex. n°9: $P_A=2,4\,10^5\ (N/m^2)$, $P_B=P_C=2,415\,10^5\ (N/m^2)$ et $P_D=2,619\,10^5\ (N/m^2)$

Ex. n°10: L'eau peut monter jusqu'à une hauteur de 17,58 (m) si la colonne montante est en communication avec l'air atmosphérique; c'est à dire: que l'un des robinet, situé à plus de 17,58 (m), est ouvert.

Ex. n°11:

1°-: (Cf. Figure)
2°-: $P=1,015\,10^5\ (N/m^2)$.



Ex. n°12:

1°-: h=3,67 (mm).
2°-: Il faut rajouter 5,55 (cm^3) dans la branche contenant l'huile.

Ex. n°13:

1°-: $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$
2°-: $y = \dfrac{\Delta P}{g\left[\rho_1 - \rho_2 + (\rho_1 + \rho_2)\frac{s}{S}\right]}$
3°-: y=10 (cm).

Ex. n°14:

1°-: h= 5 (cm).
2°-: p= 0,5 (N).
3°-: d=0,01 (cm).
4°-: $f=10^{-3}$ (N).

Ex. n°15:

1°-: $\frac{S}{s} = 5$
2°-: $f \cong 91\ (N) = 9,1\ (Kgp)$; la force maximale est celle pour laquelle, la charge est soulevée de 40 (cm) et le petit piston est enfoncé à fond
3°-: L'influence de la masse volumique du liquide étant négligeable, on peut donc dire: que pratiquement, le résultat ne dépend pas de la nature du liquide utilisé.

Ex. n°16:

1°-: $h_0=10$ (cm).
2°-: $P=1,5\,10^5\ (N/m^2) = 1,5\ P_0$.

Ex. n°17:

1°-: $\Delta P=P-P_0= -12,06\ (N/m^2)$
2°-: $\Delta P=P-P_0= +12,06\ (N/m^2)$
3°-: h'=1,2 (mm). Comme la dénivellation h' est trop faible, on ne peut donc pas utiliser un manomètre à un seul liquide pour mesurer les faibles pressions (l'erreur de lecture est de l'ordre de h').

Poussée d'Archiméde et flottabilité

Ex. n°18:

1°-: a=10 (cm).

2°-: h=1 (cm) (comme le volume de la masse est négligeable devant celui du cube, la poussée d'Archimède est dûe seulement au volume d'eau déplacé par le cube).

3.1: e=2,5 (cm)

3.2: V_h=12,5 (l)=12500 (cm^3).

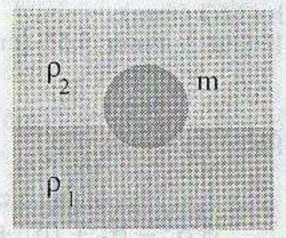
Ex. n°19:

1°-: ρ_{moy}=1,22 (g/cm^3).

2°-: π=100 (N).

3.1: (Cf. Figure).

3.2: π_2=80,32 (N).



Ex. n°20: $\frac{V_1}{V_0} = 33,33\%$; c'est à dire que le tiers du corps est immergé dans l'eau.

Ex. n°21:

1°-: T=2,04 (N).

2°-: V_{huile}=85 (cm^3) et $V_{solution}$=17 (cm^3).

3°-: V_{huile}=102 (cm^3)

Ex. n°22: $\frac{V_i}{V_0} = 90,18\%$ c'est à dire que les 9/10 (environ) de l'iceberg est sous l'eau.

Ex. n°23:

1°-: $\rho_{\text{eau douce}} < \rho_{\text{eau de mer}}$ $\Rightarrow$ que la poussée d'Archimède s'exerçant sur un volume d'eau douce est supérieure à son poids; il s'en suit donc un mouvement ascendant de ce volume d'eau douce. Il suffit donc de placer le tuyau sur la trajectoire de l'eau douce pour remplir la bâche.

2.1: La résultante est verticale et est dirigée vers le haut. Quant à son intensité, elle vaut 1,048$10^5$ (N).

2.2: t=20 (s).

Ex. n°24:

1°-: ρ_0=2,77 (g/cm^3).

2°-: P_{ap}=0,064 (N). Oui, le poids de l'eau déversée est égal à la différence qu'il y a entre le poids réel et le poids apparent.

Ex. n°25:

1°-: ρ_{moy}=14,81 (g/cm^3).

2°-: Le bijoutier est un menteur car, $\rho_{moy} < \rho_{or}$.

3°-: La masse d'or contenue dans la parure est de 587 (g) environ.

Ex. n°26:

1°-: $\rho_1 H_1 = \rho_2 H_2$.

2°-: ρ_2=0,8 (g/cm^3)

Ex. n°27:

1°-: ρ=0,92 (g/cm^3)

2°-: Le niveau varie de 4,6 (cm).

Ex. n°28:

1°-: ρ_{al}=0,78 (g/cm^3).

2°-: La tige du densimètre doit être graduée conformément à la relation suivante:

$$d = \frac{80}{105,6 - 1,6\,x}$$

, x est la longueur, en (cm), de la partie émergée de la tige du densimètre.

La plage des densités mesurables est alors: $0,75 \leq d \leq 1,4$.

Ex. n°29:

1°-: $\rho_d \cong 1\ (g/cm^3)$

2°-: $s \cong 0,34\ (cm^2)$ et $V_0 \cong 33,33\ (cm^3)$

3°-: $h \cong 10,7\ (cm)$.

Tension superficielle et phénomène de capillarité

Ex. n°30:

1°-: $F_{TS} \cong 3,2\,10^{-3}$ (N) .

2°-: $\alpha \cong 27,3°$.

Ex. n°31:

1°-: La résultante des forces de tension superficielle est verticale et est dirigée vers le haut. Quant à son intensité, elle vaut: $F_{TS} \cong 9\ 10^{-3}$ (N) .

2°-: $\Delta h \cong 0,7$ (mm)

3°-: $h \cong 1,32$ (mm)

Ex. n°32:

1°-: $P_i \cong 2,0003\ 10^5$

2°-: $R \cong 10$ (mm).

Ex. n°33:

1°-: $P_i = 1,000110^5$ (N/m^2)

2°-: $F_{TS} = 3,1410^{-3}$ (N)

3°-: oui. La force de tension superficielle F_{TS} est responsable de la différence de pression entre l'air à l'intérieur de la bulle et l'air extérieur.

Ex. n°34:

1°-: Quand on libère l'extrémité inférieure du tube capillaire, le liquide s'écoule dans l'enveloppe liquide (cohésion des molécules externes). Comme celle ci est soumise au forces de tension superficielle au niveau du tube, le liquide se retrouve emprisonné dans l'enveloppe et exerce sur cette dernière une force verticale égale à son poids; quand le poids du liquide l'emporte sur la résultante des FTS, l'enveloppe (goutte) s'arrache. Une autre enveloppe reprend alors sa place et ainsi de suite. Donc, le liquide coulera goutte à goutte.

2°-: $m=39,1610^{-3}$ (g).

Ex. n°35:

1°-: $A \cong 18410^{-3}$ (N/m)

2°-: Le patient doit prendre 2 gouttes de médicament toute les 12 heures; c'est à dire 2gouttes le matin et 2 gouttes le soir.

Ex. n°36:

1°-: $h = \dfrac{2A}{\rho g r}$; (ménisque = demi cercle ----> α=0°).

2°-: $r \cong 0,57$ (mm)

Ex. n°37:

1°-: La résultante des forces de tension superficielle est verticale et est dirigée vers le haut. Quant à son intensité, elle vaut 28,26 10^{-2} (N).

2°-: $h \cong 1,87$ (cm).

3°-: $h' \cong 1,91$ (cm).

Ex. n°38:

1°-: h=21 (mm).

2°-: $A \cong 12110^{-3}$ (N/m)

Ex. n°39:

1°-: $h = \dfrac{2A}{\rho g r} - \dfrac{2}{3}r$

2°-: $r \leq 0,66$ (mm).

RAPPEL DE COURS

Introduction

Dans la 1ère partie, on a vu qu'un liquide est un milieu matériel déformable, constitué de molécules en interaction mutuelle. L'hydrodynamique étudie les relations entre les forces et les mouvements des liquides.

Quand une molécule ou un groupement de molécules d'un liquide est en mouvement, il est soumis, de la part des autres molécules, à des forces de freinage ou accélératrices, appelées **forces de viscosité**. Les forces de viscosité sont d'origine moléculaire. Donc, tous les liquides sont pourvus de viscosité.

Pour faire cette étude complexe, on a construit, en se fiant à l'apparence visuelle des liquides, le modèle mathématique suivant: Un liquide (ou d'une manière générale un fluide) est considéré comme étant un milieu matériel continu. Il est composé de petits grains de matière, appelés **points matériels** ou particules fluides. Un point matériel est constitué par la matière qui est à l'intérieur d'un élément de volume du liquide $d\tau$ (il est donc constitué de plusieurs molécules); sa masse dm est telle que:

$$dm = \rho \, d\tau$$

où: ρ est la masse volumique du fluide au point considéré.

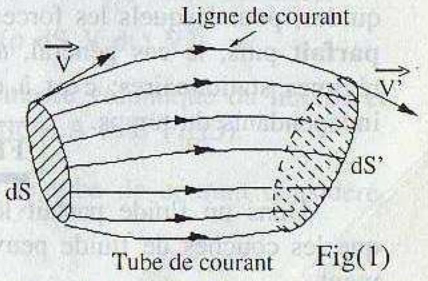
- Un liquide est en mouvement lorsque l'un, au moins, de ses points matériel l'est.

Définitions

- La trajectoire suivie par un point matériel d'un liquide est appelée **ligne de courant**.

- Lorsque un point matériel d'un liquide est en mouvement, son vecteur vitesse $\vec{V}$ est tangent en tout point à sa trajectoire, donc à sa ligne de courant. Il s'en suit alors que deux lignes de courant d'un même liquide ne peuvent se couper.

- Lorsque le régime de l'écoulement considéré est indépendant du temps, en un point donné d'une ligne de courant, les vitesses des points matériels du liquide, quand ils passent par ce point, prennent la même valeur.



Fig(1)

- Un tube, dont les génératrices sont constituées par des lignes de courant, est appelé **tube de courant** Fig(1).

Remarque: un liquide, en écoulement dans un tube de courant, ne peut s'échapper par sa surface latérale. En effet, si les éléments fluides sortaient par la surface latérale du tube de courant, cela veut dire que quelque part les lignes de courant se coupent. Au point d'intersection, les particules fluides auront alors deux vecteurs vitesse, ce qui serait incompatible avec la réalité physique.

Loi de conservation de masse

Si on considère le tube de courant de la Fig(1), par exemple, compte tenu de la remarque précédente, la masse dm de fluide qui rentre par dS, durant un intervalle de temps dt, est forcément égale à celle dm' qui en ressort durant le même intervalle de temps. Si V et V' sont les vitesses des points matériels en dS et en dS' et si ρ et ρ' sont, respectivement, les masses volumiques du fluide en dS et dS', les expressions de dm et de dm' s'écriront comme suit:

$$dm = \rho\,(dS\ V\ dt) \qquad \text{et} \qquad dm' = \rho\,(dS'\ V'\ dt)$$

On aura donc:

$$\boxed{\rho\, dS\ V = \rho'\, dS'\ V'} \qquad (1)$$

Comme un liquide est incompressible, c'est à dire que ρ=ρ', la relation (1) s'écrit aussi comme suit:

$$\boxed{Q = dS\ V = dS'\ V'} \qquad (2)$$

La loi, exprimée par la relation (1), est appelée **loi de conservation de masse.** Quant à celle, exprimée par la relation (2), elle est appelée: loi de **conservation du débit volumique Q** .

Remarque: la relations (2) et l'application de la relation (1) (qui est valable pour un fluide quelconque) à un liquide; elles sont donc équivalentes.

(Cf. Ex. n° 2.1 , 2.2, 2.3 et 2.4)

Dans ce paragraphe, on va, d'abord, étudier le mouvement des liquides, pour lesquels les forces de viscosité sont négligeables, **appelé fluide parfait** puis, le cas général, appelé **fluide réel.** On ne considérera que les régimes stationnaires; c'est à dire: ceux pour lesquels les phénomènes sont indépendants du temps.

FLUIDE PARFAIT

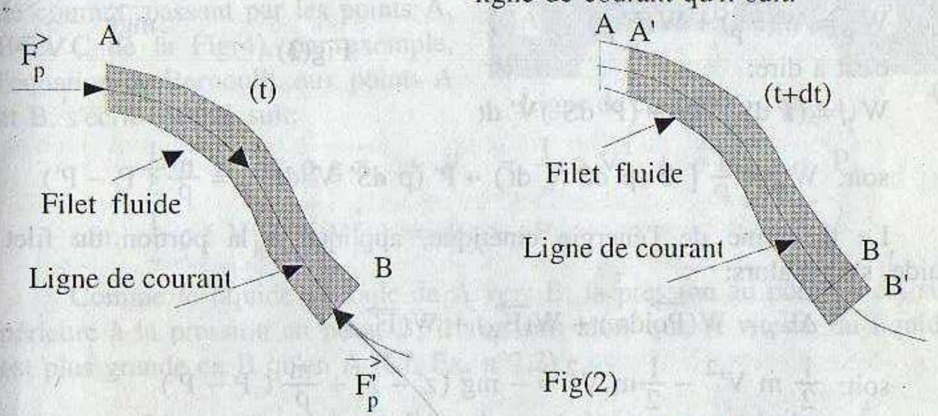
Dans un fluide parfait les forces de viscosité sont nulles. Il s'en suit que les couches de fluide peuvent glisser les unes sur les autres sans frottement.

Au cours de leurs mouvements, les éléments fluides sont soumis aux

forces de volume (c'est à dire leurs poids) et aux forces de surface (c'est à dire les actions de contact que les éléments fluides exercent les uns sur les autres). Comme les frottements sont négligeables (fluide parfait), les forces de surface se réduisent aux forces de pression seulement (les forces de surface sont perpendiculaires aux surfaces des éléments fluides).

Equation de Bernoulli

Considérons une portion d'un filet fluide entre deux instants t et (t+dt), circulant à l'intérieur d'un minuscule tube de courant Fig(2). Les forces de pression qui contribuent à son mouvement sont celles qui s'exercent sur ses extrémités dS et dS'; elles sont parallèles, à tout instant, aux tangentes à la ligne de courant qu'il suit.



Fig(2)

A l'instant t+dt, il y a, entre les sections droites A' et B, autant d'éléments fluides qu'à l'instant t. La somme de leurs énergies cinétiques est donc égale à celle des énergies cinétiques des éléments fluides qui se trouvaient, entre les sections A' et B à l'instant t. Tout se passe donc comme si le fluide qui était entre les sections A et A', à l'instant t, est passé entre les sections B et B'. La variation de l'énergie cinétique de la portion du filet fluide, entre les instants t et (t+dt), est alors:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\,(\rho\ dS'\ V'\ dt)\ V'^2 - \frac{1}{2}\,(\rho\ dS\ V\ dt)\ V^2$$

où: ρ, V et V' sont, respectivement, la masse volumique du liquide et les vitesses des particules fluides dans les sections A et B Fig(3).

La loi de conservation de masse, dans le tube de courant considéré, permet d'écrire:

$$\rho\ dS'\ V'\ dt = \rho\ dS\ V\ dt$$

la masse m du fluide qui se trouve entre les sections A et A' est donc égale à celle du fluide compris entre les section B et B'. Il s'en suit alors que la variation, entre les instants t et (t+dt), de l'énergie potentielle gravitationnelle, de la portion du filet fluide, est égale à celle de m; soit:

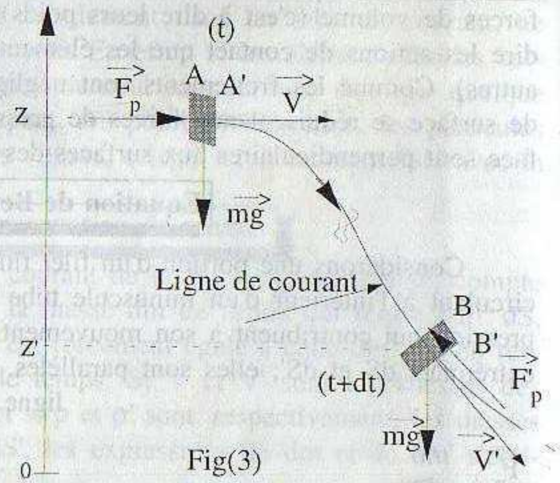
$\Delta E_p^g = mg\,(z' - z)$

Quant au travail des forces de pression, entre les instants t et (t+dt), il vaut:

$W_p = W(\overrightarrow{F_p}) + W(\overrightarrow{F'_p})$

c'est à dire:

$W_p = (P\,dS)Vdt - (P'\,dS')V'\,dt$



Fig(3)

$$\text{soit: } W_p = \frac{1}{\rho}\,[\,P\,(\rho\,dS\,V\,dt) - P'\,(\rho\,dS'\,V'\,dt)\,] = \frac{m}{\rho}\,(P - P')$$

Le théorème de l'énergie cinétique, appliqué à la portion du filet fluide, s'écrit alors:

$$\Delta E_c = W(\overrightarrow{Poids}) + W(\overrightarrow{F_p}) + W(\overrightarrow{F'_p})$$

$$\text{soit: } \frac{1}{2}\,m\,V'^2 - \frac{1}{2}m\,V^2 = -\,mg\,(z' - z) + \frac{m}{\rho}\,(P - P')$$

$$\text{c'est à dire: } \frac{1}{2}\,\rho\,V'^2 - \frac{1}{2}\,\rho\,V^2 = -\,\rho g\,(z' - z) + (P - P') \qquad (3)$$

Remarque: les paramètres qui interviennent dans l'équation (3) ne dépendent que des points extrêmes du filet fluide considéré; ils ne dépendent donc pas du temps. Par conséquent, la même équation peut s'écrire pour n'importe quel filet fluide et quelle que soit sa longueur.

En regroupant les paramètres caractéristiques de chaque extrémité dans un même membre, l'équation (3) s'écrit:

$$\frac{1}{2}\,\rho\,V^2 + \rho g\,z + P = \frac{1}{2}\,\rho\,V'^2 + \rho g\,z' + P' \qquad (4)$$

Comme l'équation (4) est valable quelle que soit la longueur de la portion du filet fluide, on peut donc dire qu'en tout point d'une ligne de courant du liquide, on a:

$$\boxed{\frac{1}{2}\,\rho\,V^2 + \rho g\,z + P = Cte} \qquad (5)$$

L'équation (5) qui exprime la conservation de l'énergie totale de tout

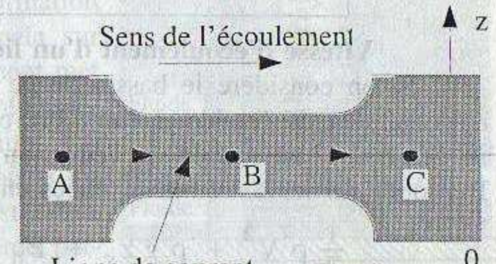
élément fluide le long de sa ligne de courant, est appelée: **équation de Bernoulli.**

Applications de l'équation de Bernoulli.

Phénomène de Venturi

En régime stationnaire, l'expérience montre que la vitesse d'écoulement d'un liquide, dans une conduite, augmente quand sa section diminue. Un tel phénomène est appelé: **phénomène de Venturi.**

Ce phénomène trouve son explication à travers l'équation de Bernoulli. En effet, si on considère la ligne de courant, passant par les points A, B et C de la Fig(4), par exemple, l'équation de Bernoulli, aux points A et B, s'écrit comme suit:



Fig(4)

$$\frac{1}{2}\,\rho\,V_A^2 + \rho\,g\,z_A + P_A = \frac{1}{2}\,\rho\,V_B^2 + \rho\,g\,z_B + P_B$$

$$\text{soit: } \frac{1}{2}\,\rho\,(\,V_B^2 - V_A^2\,) = P_A - P_B$$

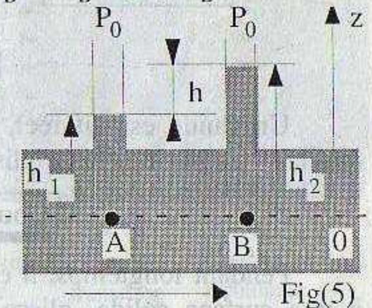
Comme le liquide s'écoule de A vers B, la pression au point A est supérieure à la pression au point B; il s'en suit alors que la vitesse du liquide est plus grande en B qu'en A (Cf. Ex. n°2.2).

Mesure de vitesses d'écoulement dans une conduite

La méthodes de mesure de la vitesse d'écoulement d'un liquide dans une conduite horizontale, appelée: **méthode à tubes de Pitot,** est basée sur l'équation de Bernoulli. En effet, sur la Fig(5) par exemple, l'équation de Bernoulli, sur la ligne de courant passant par A et B, s'écrit comme suit:

$$\frac{1}{2}\,\rho\,V_A^2 + P_A + \rho\,g\,z_A = \frac{1}{2}\,\rho\,V_B^2 + P_B + \rho\,g\,z_B$$

Comme la conduite est horizontale et que le liquide en B est au repos, on a: $z_A = z_B$ et $V_B = 0$. L'équation ci-dessus prend la forme suivante: $\frac{1}{2}\,\rho\,V_A^2 + P_A = P_B$



Fig(5)
sens de l' écoulement

Dans les tubes verticaux, le liquide est en équilibre. On peut donc lui appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique; soit:

$$P_A - P_0 = \rho g h_1$$

et: $P_B - P_0 = \rho g h_2$

soit: $P_B - P_A = \rho g(h_2 - h_1) = \rho g h$

D'où la vitesse d'écoulement du liquide dans la conduite horizontale.

$$\boxed{V_A = \sqrt{\frac{2(P_B - P_A)}{\rho}} = \sqrt{2gh}}$$

Vitesse d'écoulement d'un liquide à travers un orifice.

Si on considère le bassin de de la Fig(6), par exemple, la vitesse v d'écoulement du liquide, à l'air libre et à travers l'orifice de section s, peut se déterminer au moyen de l'équation de Bernoulli. En effet, l'équation de Bernoulli sur les extrémités, situées en S et s, d'une même ligne de courant, s'écrit:

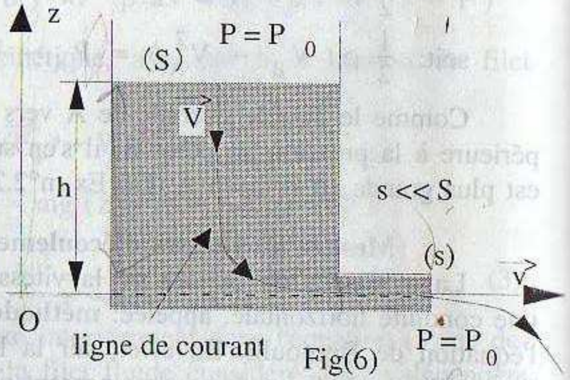
$$\frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z_S + P_0 = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z_s + P_0$$

La conservation du débit volumique dans le tube de courant, prenant appui sur (S) et (s), s'écrit:

$$Q = SV = sv$$

soit: $\frac{s}{S} = \frac{V}{v} << 1$

En négligeant V devant v et en remplaçant $(z_S - z_s)$ par h dans l'équation de Bernoulli, on obtient l'expression donnant la vitesse v, appelée formule de **Torrecelli**; soit:



Fig(6)

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$ (Cf. Ex. n°2.3 et 2.4)

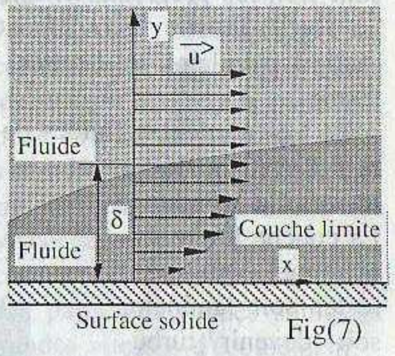
FLUIDE RÉEL

Un fluide est dit réel, lorsque il est pourvu de viscosité; c'est à dire que les couches de fluide glissent les unes sur les autres avec frottement.

Couche limite dynamique

Pendant longtemps, il était admis que tout fluide, en écoulement relatif à une surface solide, glisse le long de cette surface. Cette hypothèse **de fluide parfait** a favorisé le développement de la mécanique des fluide mais

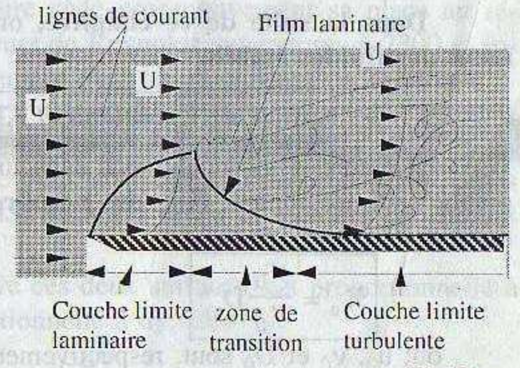
elle n'explique pas le phénomène de traînée sur les obstacles et la perte d'énergie des fluides en écoulement dans les canalisations. L'exploration du champs de vitesse **u** normalement à une surface solide, sur laquelle s'écoule un fluide, met en évidence l'existence d'une mince couche de fluide, appelée **couche limite dynamique**, à travers laquelle la vitesse varie considérablement Fig(7). L'adhérence du fluide à cette surface solide (u=0 pour y=0) entraîne un glissement important des couches fluides les unes sur les autres avec formation éventuelle de tourbillons Fig(8), et cela sur une épaisseur **δ** très faible. Ce glissement met en jeu la viscosité du fluide qui est prépondérante à l'intérieur de la couche limite. Par contre, à l'extérieur de cette couche, où la vitesse varie peu, l'effet de viscosité est faible et le fluide peut être considérer comme parfait.



Fig(7)

Couche limite laminaire et Couche limite turbulente

Si on considère l'écoulement d'un fluide réel le long d'une paroi plane. telle que sa vitesse soit uniforme à l'amont de la plaque Fig(8), l'expérience montre qu'au contact de la plaque, le fluide est brusquement freiné, du fait de son adhérence à la paroi et de sa viscosité. La couche limite dynamique qui se développe à partir du bord d'attaque est d'abord **laminaire**: le fluide s'écoule en couche parallèles. Puis, après une **zone de transition**, elle devient **turbulente**: des tourbillons se forment, entraînant un brassage désordonné de l'écoulement et une certaine **uniformisation des vitesses**. A l'intérieur de la couche limite turbulente et contre la paroi, il subsiste une mince couche de fluide, appelée **film laminaire**, où les tourbillons disparaissent et où les phénomènes de viscosité sont prépondérants. On montre que les frottements, donc la perte d'énergie, sont plus importants dans la couche limite turbulente que dans la couche limite laminaire. Cependant, la pression du fluide garde la même valeur à la traversée de la couche limite dynamique.



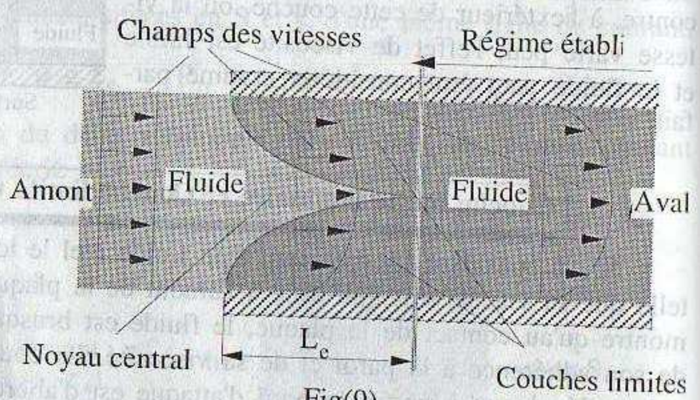
Fig(8)

Ecoulement dans une canalisation - Régime établi

Lorsque un fluide réel s'écoule dans une canalisation, il y a, comme précédemment, formation d'une couche limite dynamique sur les parois interne de la canalisation. En effet, les particules fluides voisines de la paroi sont freinées progressivement, engendrant ainsi la couche limite dynamique. La Fig(9) illustre l'écoulement d'un fluide à l'intérieur d'une canalisation de section circulaire. A l'entrée, la répartition des vitesses du fluide est uniforme.

Les particules fluides de la zone centrale (noyau) qui n'ont pas encore subi l'effet du frottement sont accélérées pour conserver le débit massique à travers la conduite.

La couche limite dynamique, qui peut rester soit laminaire soit devenir turbulente, se développe sur une longueur dite d'entrée L_e et baigne ensuite toute la conduite. Au delà de la longueur L_e, le régime d'écoulement est dit établi.



Fig(9)

Remarque: lorsque le régime d'un écoulement est établi, les vitesses des particules fluides ne dépendent que de la coordonnée transversale (r) et pas du tout de la coordonnée longitudinale.

Dans la suite de ce chapitre, on supposera les régimes d'écoulement des fluides établis.

Nature de l'écoulement - Nombre de Reynolds

La nature d'un écoulement dans une conduite est liée à la valeur du nombre adimensionnel $\Re_e$, dit: **nombre de Reynolds**; sa valeur se détermine par l'expression suivante:

$$\boxed{\Re_e = \frac{u_0}{v_0} D_0}$$

où: u_0, v_0 et D_0 sont, respectivement, la vitesse moyenne d'écoulement du fluide, sa viscosité cinématique (Cf. § viscosité) et une longueur caracté-

ristique de la surface d'écoulement; dans le cas d'un tuyau de diamètre intérieur d, on prend D_0=d.

Régimes d'écoulement

Dans une conduite, les régimes d'écoulement d'un fluide sont caractérisés par le type de couche limite dynamique qui s'établit dans celle ci. Il y en a donc deux régimes:

- Régime laminaire: c'est celui qui correspond à une couche limite laminaire; c'est à dire: que les particules fluides suivent des trajets biens déterminés (lignes de courants). L'écoulement peut être schématisé par différentes couches de fluide qui glissent les unes sur les autres sans se mélanger. Cependant, les couches de fluide exercent les unes sur les autres des forces d'entraînement ou de freinage dites de viscosité.

- Régime turbulent: c'est celui qui correspond à une couche limite turbulente; c'est à dire: que les trajectoires des particules fluides subissent des déviations irrégulières; il a lieu pour les grandes vitesses d'écoulement.

Influence du Reynolds sur le régime d'écoulement

L'expérience montre que pour les faibles nombres de Reynolds, le régime d'écoulement des fluides est laminaire et il est turbulent pour ses grands nombres.

Dans le cas des canalisations de section circulaire (tuyaux), l'expérience montre que pour les nombres de Reynolds inférieurs à 2300 (environ), les régimes d'écoulements sont laminaires; ils sont turbulent pour des valeurs supérieures à 3000.

Remarque: le passage du régime laminaire au régime turbulent n'est évidemment pas brutal; il existe un régime intermédiaire dit: **régime transitoire** dans lequel le régime laminaire cède progressivement sa place au régime turbulent. Donc, pour les valeurs de Reynolds supérieures à 2300 et inférieures à 3000, le régime d'écoulement n'est pas complètement turbulent.

Expression de la force de viscosité - coefficient de viscosité dynamique

Dans un écoulement laminaire plan, considérons deux couches voisines dS_1 et dS_2, parallèles, de surface dS, distantes de dy et animées de vitesses $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V+dV}$ Fig(10).

La force d'interaction $\overrightarrow{dF}$, entre ces deux surfaces, est proportionnelle à dS et $\overrightarrow{dV}$ et est inversement proportionnelle à dy, soit:

$$\overrightarrow{dF}_{12} = -\overrightarrow{dF}_{21} = \overrightarrow{dF} = -\eta\, dS \frac{d\overrightarrow{V}}{dy}$$

La constante de proportionnalité η est appelée **coefficient de viscosité dynamique** du fluide; il s'exprime en Poiseuille (Kg/ms) dans le système (MKSA) et en poise (P_o) dans le système (CGS)

1 Poiseuille = 10 poi:

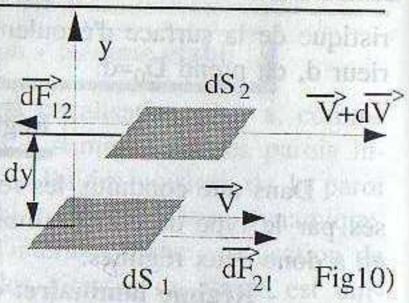


Fig10)

Remarque: comme pour tous les effets dûs aux interactions moléculaires, la valeur du coefficient de viscosité dynamique diminue quant la température du fluide augmente.

Viscosité cinématique

On appelle viscosité cinématique d'un fluide, le rapport de son coefficient de viscosité dynamique η par sa masse volumique ρ. On la note par la lettre ν et elle s'exprime, en (m^2/s) dans le système MKSA et en stockes (St) dans le système (CGS).

$$\boxed{\nu = \frac{\eta}{\rho}}$$

1 (St)=10^{-4} (m^2/s)

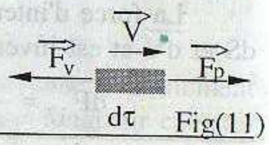
Ecoulement dans un tube de section circulaire - Loi de Poiseuille

Hypothèses:

- Le régime d'écoulement est laminaire
- le fluide est adhérent vis à vis de la paroi du tube (V(r=R)=0).
- la pression en tout point d'une section droite donnée du tube est constante (ce qui suppose que le tube est fin).
- le coefficient de viscosité dynamique du fluide est constant (température du fluide constante) .
- la vitesse d'écoulement est axiale.
- l'écoulement se fait sous l'action des forces de pression seulement et l'accélération $\vec{a}(t)$ des éléments fluides est faible. On négligera $m\vec{a}(t)$ devant les forces de pression et de viscosité.

Etablissement de la loi de Poiseuille

Considérons un élément de volume $d\tau$ du fluide ayant la forme d'un cylindrique de rayon r, de longueur L et possédant le même axe de révolution que le tube. Comme la résultante des forces qui lui sont appliquées est négligeable ($m\vec{a}(t) \cong \vec{0}$), il y a donc, à tout instant, équilibre entre



Fig(11)

les forces de pression ($\vec{F}_p$) et celles de freinage ($\vec{F}_v$) Fig(11). On peut donc écrire: $\vec{F}_p + \vec{F}_v = \vec{0}$

soit en projetant sur un axe horizontal:

$$F_p - F_v = 0$$

avec: $F_p = F_p(\text{en amont}) - F_p(\text{en aval}) = (P_{amont} - P_{aval})\pi r^2 = \Delta P \pi r^2$.

et: $F_v = -\eta 2\pi r \frac{dV}{dr}$

soit: $\Delta P \pi r^2 = -\eta 2\pi r L \frac{dV}{dr}$

L'équation donnant la répartition des vitesses dans une section droite du tube est alors:

$$\frac{dV}{dr} + \frac{\Delta P}{2\eta L} r = 0$$

En intégrant l'équation ci-dessus, on obtient le champ des vitesses dans une section droite du tube; soit:

$$dV = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r dr \Rightarrow \int dV = -\frac{\Delta P}{2\eta L} \int r dr$$

$$V(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L} r^2 + Cte$$

La condition d'adhérence permet de déterminer la constante d'intégration; soit:

$$V(r=R) = 0 = -\frac{\Delta P}{4\eta L} R^2 + Cte \Rightarrow Cte = \frac{\Delta P}{4\eta L} R^2$$

D'où le champ des vitesses.

$$V(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

Le débit volumique $\dot{Q}$ du fluide, à travers une de ses sections droites, est alors:

$$\dot{Q} = \int_0^R V(r) 2\pi r dr = \frac{\Delta P}{4\eta L} 2\pi \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

soit: $\boxed{\dot{Q} = \frac{\pi \Delta P}{8\eta L} R^4}$

L'expression ci-dessus, donnant le débit volumique d'un fluide réel à travers un tube fin, de section circulaire et de rayon R, est appelée **loi de Poiseuille.** (Cf. Ex. n°2.5)

Perte de charge dans un tuyau

La loi de Poiseuille précédente est valable dans toute conduite de section circulaire pourvu que: le rayon R de la conduite soit très faible devant sa longueur L (R<<L) et que le régime d'écoulement soit laminaire, permanent et établi. Ainsi, la perte de charge $\Delta P = P_{amont} - P_{aval}$, due au frottements visqueux, s'écrit:

$$\boxed{\Delta P = P_{Amont} - P_{Aval} = \left(\frac{8\eta}{\pi R^4}\right) \dot{Q} L} \quad \text{(Cf. Ex. n°2.6)}$$

Mesure du coefficient de viscosité - Viscosimètre

Les coefficients de viscosité (cinématique et dynamique) d'un liquide se mesurent au moyen d'appareils, appelés viscosimètres. Dans la pratique, on utilise deux types de viscosimètres: le viscosimètre à écoulement et le viscosimètre à entraînement

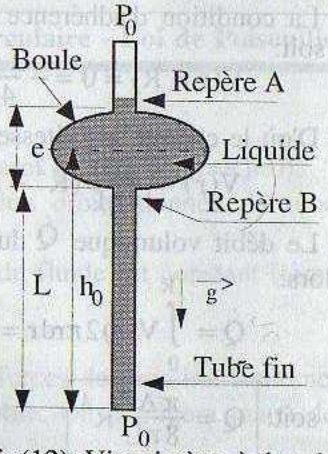
Viscosimètre à écoulement

Il est constitué par un tube très fin surmonté d'une boule Fig(12). Le volume compris entre les repères A et B vaut V_0 à la température ambiante (environ 18°C). Son principe est basé sur la loi de Poiseuille.

Principe de fonctionnement: par aspiration, on remplit le tube de liquide jusqu'au repère A. Ensuite, on laisse couler le liquide, en maintenant le tube dans la position verticale. Au moment où le niveau de liquide passe par le repère B, le volume qui s'est écoulé à travers le tube est V_0. Si t_0 est le temps mesuré, au moyen d'un chronomètre, entre le début de l'écoulement et le moment ou le niveau de liquide passe par le repère B, le débit volumique du liquide dans le tube sera:

$$\dot{Q} = \frac{V_0}{t_0}$$

Les pressions sur les surfaces supérieure et inférieure du liquide étant les mêmes (P_0 sur la Fig(12), son écoulement, dans le tube fin, s'effectue donc sous l'action du poids de la colonne de liquide, comprise entre l'extrémité du tube et la surface libre supérieure, seulement.



Fig(12): Vicosimètre à écoulement

Dans la pratique, la longueur L de la partie inférieure du tube est très grande devant l'épaisseur e de la boule (Cf. Fig(12). On peut donc considérer, en première approximation, que l'écoulement du volume V_0 de liquide, dans le tube fin, s'est effectué à poids constant de la colonne de liquide; c'est à dire avec une hauteur moyenne de la colonne de liquide égale à h_0. (Cf. Fig(12)). La loi de Poiseuille peut donc s'appliquer à un pareil écoulement. Il suffit, pour cela, de remplacer l'intensité de la résultante des forces de pression F_p, de l'écoulement de Poiseuille, par le poids $m_0 g$ de la colonne de liquide de hauteur h_0; soit:

$$F_p = \Delta P \pi R^2 = m_0 g = \rho(\pi R^2 h_0) g$$

R étant le rayon intérieur du tube fin.

Tout se passe donc comme si le liquide s'écoulait à travers le tube fin sous l'action des forces de pression dont la différence de pression ΔP est:

$$\Delta P = \rho h_0 g$$

La loi de Poiseuille pour cet écoulement s'écrira donc comme suit:

$$\boxed{\dot{Q} = \frac{\pi \rho g h_0}{8\eta L} R^4}$$

On a donc:

$$\dot{Q} = \frac{\pi \rho g h_0}{8\eta L} R^4 = \frac{V_0}{t_0}$$

D'où la valeur du coefficient de viscosité cinématique du liquide.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \left(\frac{\pi g h_0 R^4}{8 L V_0}\right) t_0$$

La quantité entre parenthèse de la relation ci-dessus ne dépend que de la géométrie du viscosimètre; elle est appelée constante du viscosimètre et sa valeur est, en général, donnée par son constructeur. En la posant égale à a, l'équation précédente s'écrit:

$$\boxed{\nu = a t_0}$$

On peut donc déterminer le coefficient de viscosité cinématique d'un liquide en mesurant le temps t_0 nécessaire à l'écoulement d'un volume V_0 de ce liquide dans un viscosimètre à écoulement (Cf. Ex. n°2.8).

Viscosimètre à entraînement

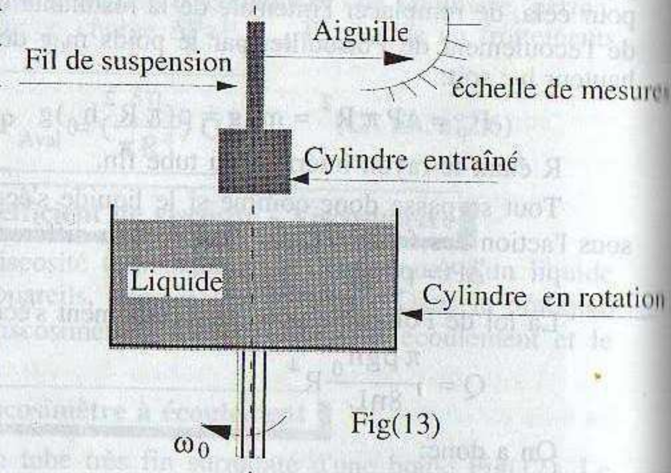
Il est constitué de deux cylindres coaxiaux: le premier, animé d'une vitesse de rotation ω_0, contient le liquide dont on veut mesurer le coefficient de viscosité dynamique et le second, est un cylindre plein, suspendu par un fil de constante de torsion α, que l'on peut introduire ou extraire du liquide à volonté Fig(13).

Son principe de fonctionnement utilise la définition du coefficient de viscosité dynamique η. En effet, en introduisant le cylindre suspendu dans le liquide, ce dernier tend à le faire tourner en exerçant sur lui un couple proportionnel au coefficient de viscosité dynamique η du liquide ($\Gamma = k\eta$). Comme le cylindre est fixé à un fil de torsion, il sera également soumis à un couple de rappel proportionnel à l'angle de rotation α;.soit: $(\Gamma'= k'\alpha)$. A l'équilibre, on aura donc:

$\Gamma = \Gamma' \quad \Leftrightarrow \quad k\eta = k'\alpha$

soit: $\boxed{\eta = \frac{k'}{k}\alpha = C\,\alpha}$

Pour une vitesse de rotation ω_0 constante du cylindre mobile, le rapport k'/k=C peut se déterminer à partir d'une mesure, dite d'étalonnage, effectuée sur un liquide dont le coefficient de viscosité dynamique est connu.



Fig(13)

En fixant une aiguille sur le fil de suspension, on peut mesurer l'angle de rotation α du cylindre donc son coefficient de viscosité dynamique. Dans la pratique, l'échelle de mesure de la Fig(13) est graduée en poises.

(Cf. Ex. n°2.9)

Remarque importante: la viscosité d'un liquide dépend fortement de sa température; il est donc nécessaire de la ramener à celle indiquée sur le viscosimètre et de veiller à ce qu'elle soit maintenue durant la mesure.

Résistance au mouvement dans un fluide

Comme nous venons de voir, le liquide réel adhère aux surfaces solides avec lesquelles il est en contact. Les couches de fluides qui sont en contact avec le corps, en mouvement dans le liquide, se meuvent donc avec la même vitesse que lui. Comme les couches fluides exercent les unes sur les autres des forces de viscosité, le liquide exerce, sur le corps en mouvement et par l'intermédiaire des couches fluides qui sont en contact avec lui, une force de ralentissement $\overrightarrow{f_v}$ dite: **résistance du fluide**.

Pour les faibles vitesses du corps (V<1 (m/s) et d'une manière générale pour Reynolds < 0,5 environ), donc, des couches de fluides qui sont en contact avec lui et qui correspondent au régime d'écoulement laminaire, la résistance du fluide ne dépend que du coefficient de viscosité dynamique η du fluide, de la géométrie du corps et de sa vitesse U.

Dans le cas d'une sphère, de rayon R et animée d'une vitesse $\overrightarrow{U_0}$ dans un liquide de coefficient de viscosité dynamique η, la résistance du fluide $\overrightarrow{f_v}$, appelée aussi **formule de Stockes**, s'exprime comme suit:

$$\overrightarrow{f_v} = -6\pi\eta R\overrightarrow{U_0}$$

Sédimentation - Vitesse de sédimentation

La sédimentation est la progression lente des particules, en suspension dans un liquide, sous l'action de leurs poids.

Vitesse de sédimentation

En régime permanent, la vitesse V d'une particule sphérique, de rayon r et de masse volumique ρ, en mouvement (sous l'action de son poids) dans un liquide de coefficient de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ_0, dite: **vitesse de sédimentation**, s'écrit (Cf. Ex. n°2.6 et 2.7):

$$\boxed{V = \frac{2}{9}\frac{r^2}{\eta}g(\rho - \rho_0)}$$

g étant l'accélération de la pesanteur (g=9,81 (m/s²)).

Pour des vitesses supérieures à 1 (m/s), en plus du frottement visqueux, le corps solide est soumis à un autre effet retardataire, dû à la compression (en amont) et de dépression (en aval) du fluide. Dans ce cas, la loi expérimentale de la résistance du fluide s'écrit:

$$\|\overrightarrow{f_v}\| = KV^2 \quad \text{pour} \quad V < 20\ (m/s)$$

$$\text{et} \quad \|\overrightarrow{f_v}\| = KV^n \quad \text{pour} \quad V > 20\ (m/s)$$

où: n est un nombre réel supérieur à 2 (Ex: n=2,15; n=2,34 etc..) et K une constante qui dépend du fluide, de la géométrie du corps et de sa vitesse V, par rapport au fluide.

Puissance dissipée par $\overrightarrow{f_v}$

La puissance P absorbée par la résistance au mouvement, $\overrightarrow{f_v}$, est:

$$P = \left|\frac{dW(\overrightarrow{f_v})}{dt}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{f_v}\overrightarrow{dl}}{dt}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{f_v}\overrightarrow{V}dt}{dt}\right| = \|\overrightarrow{f_v}\|V$$

Dans le cas d'une sphère, de rayon R et animée d'un mouvement avec une vitesse V<1 (m/s) dans un fluide de viscosité η, la puissance P absorbée par la résistance au mouvement est: $P = 6\pi\eta R V^2$

Pour les autres cas, la puissance P dissipée s'écrit:

- pour V<20 (m/s): $P = KV^3$
- pour V>20 (m/s): $P = KV^{n+1}$

Remarque: la puissance absorbée par la résistance au mouvement se retrouve sous forme de chaleur dans le fluide.

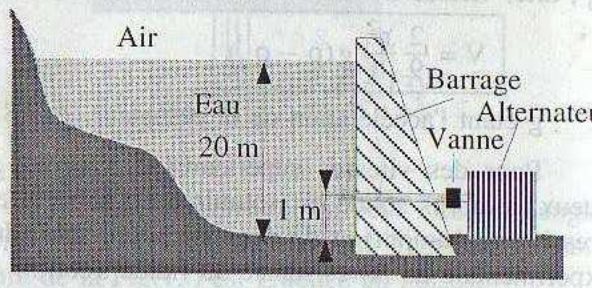
EXERCICE N°2.1

La Fig(1), ci-dessous, schématise un barrage hydraulique. A 1 (m) du sol, le barrage est muni d'un orifice horizontal de section s=314 (cm^2). La hauteur de l'eau dans le barrage est de 20 (m). Quand on ouvre la vanne du canal horizontal, l'eau sortant du barrage entraîne un alternateur, au moyen d'une turbine. Le rendement énergétique de l'opération est estimé à 80%.

1°- Calculer la vitesse et le débit volumique de l'eau à la sortie du canal, quand la vanne est complètement ouverte.

2°- Quelle est la puissance électrique fournie par l'installation. En prendra g=10 (m/s^2) et la masse volumique de l'eau ρ_e=1 (g/cm^3).

La hauteur de l'eau dans le barrage sera supposée constante et égale à 20 (m).



Fig(1)

EXERCICE N°2.2

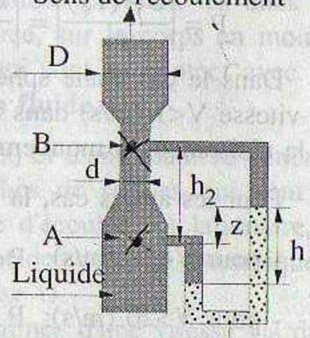
On considère un tube de Venturi, vertical et équipé d'un manomètre différentiel à mercure Fig(2). La section du tuyau a un diamètre D et celle de l'étranglement un diamètre d=D/2. Dans ce tuyau circule un liquide de masse volumique ρ'. La dénivellation entre les deux niveaux de mercure dans le manomètre est h_1=30 (cm). On supposera qu'aucune perte d'énergie n' a lieu entre les points A et B.

On donne: AB=h_2, la masse volumique du mercure ρ=13,6 (g/cm^3), ρ'=1 (g/cm^3) et g=10 (m/s^2).

1°- Déterminer, en fonction de ρ, ρ' , g, h_1 et h_2, la différence de pression ΔP entre les points B et A ($\Delta P=P_B-P_A$).

2°- Calculer la vitesse d'écoulement du liquide dans la partie large du tuyau.

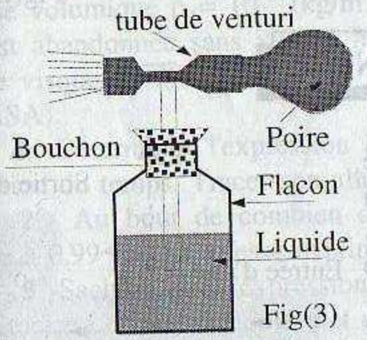
3°- Au moyen d'un tube Venturi semblable au précédent, on se propose de fabriquer un pulvérisateur. Pour cela, on installe une poire sur l'une des extrémité du venturi et un tube fin au niveau de l'étranglement. Ce dernier est ensuite introduit dans



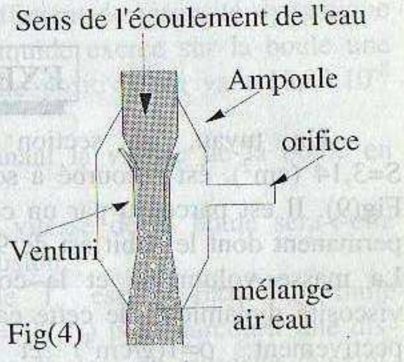
Fig(2)

un flacon contenant un liquide Fig(3). Montrer que ce système permet de pulvériser ce liquide par pressions successives sur la poire.

4°- Au moyen de deux tuyaux rétrécis à leurs extrémités et d'une ampoule en verre, munie d'un orifice, on réalise une trempe à eau Fig(4). Montrer que l'orifice de l'ampoule joue le rôle d'une pompe, quand on fait circuler de l'eau dans le venturi, constitué par les deux tuyaux.



Fig(3)

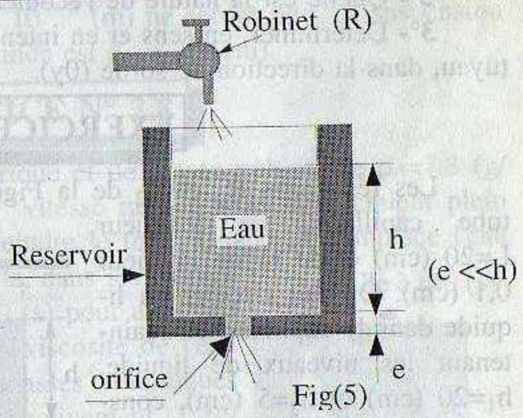


Fig(4)

EXERCICE N°2.3

Un réservoir cylindrique de section S=100 (cm^2) et de hauteur h_0=2,5 (m) est percé à sa base d'un orifice de section s=1 (cm^2) Fig(5). L'orifice du réservoir étant fermé, on le remplit d'eau sur une hauteur de 2 (m) puis on libère l'orifice (l'eau est supposée dépourvue de viscosité).

1°-Au moyen du robinet R, on maintient le niveau d'eau constant dans le réservoir. Calculer la vitesse de l'eau à la sortie de l'orifice ainsi que le débit volumique.



Fig(5)

2°-On ferme le robinet R (le niveau d'eau n'est plus constant). Calculer le temps nécessaire pour vider le réservoir.

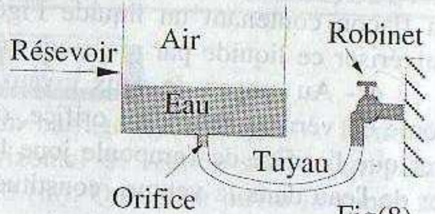
EXERCICE N°2.4

A l'air libre, le débit volumique d'un robinet de section s=1 (cm^2) est constant et vaut 0,55 (l/s). On l'utilise pour remplir un réservoir cylindrique de section S=1 (m^2) par un orifice, situé sur sa base et de section 1 (cm^2)

Fig(8). L'eau est supposée dépourvue de viscosité et on prendra $g=10$ (m/s^2).

1°- Quelle sera la hauteur maximale h_0 de l'eau dans le réservoir?

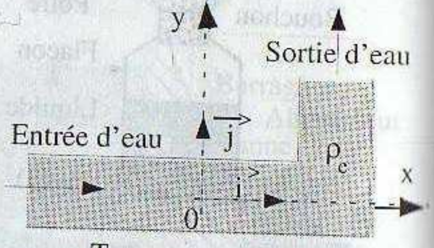
2°- Combien de temps a-t-il fallu à l'eau pour atteindre la hauteur h_0?



Fig(8)

EXERCICE N° 2.5

Un tuyau, de section uniforme $S=3,14$ (cm^2), est recourbé à son extrémité Fig(9). Il est parcouru par un courant d'eau permanent dont le débit est de 9,86 (cm^3/s). La masse volumique et le coefficient de viscosité dynamique de cette eau sont, respectivement, $\rho=1$(g/cm^3) et $\eta=1,1410^{-2}$ poises.



Fig(9)

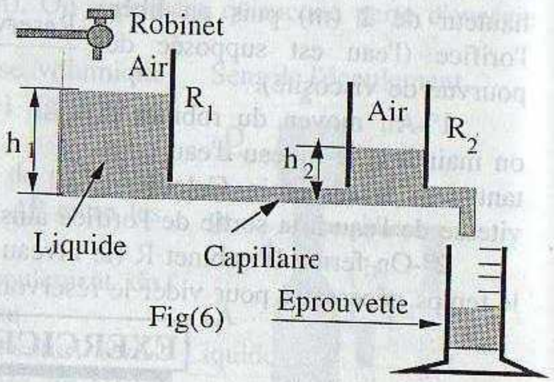
1°- Quelle est la vitesse moyenne de l'eau dans le tuyau.

2°- Quelle est la nature de l'écoulement.

3°- Déterminer, en sens et en intensité, la force exercée par l'eau sur le tuyau, dans la direction de sortie (0y).

EXERCICE N° 2.6

Les réservoirs R_1 et R_2 de la Fig(6) sont reliés à leurs bases par un tube capillaire, de longueur $L=20$ (cm) et de rayon intérieur 0,1 (cm). On fait circuler un liquide dans le capillaire en maintenant les niveaux de liquide, $h_1=20$ (cm) et $h_2=5$ (cm), constants dans R_1 et R_2.



Fig(6)

1°- Au bout de 50 (s), le volume de liquide recueilli dans l'éprouvette, placée sous R_2, est de 3 (cm^3); calculer le débit volumique du liquide dans le capillaire.

2°- Quelle est la valeur du coefficient de viscosité cinématique ν du liquide?

3°- Vérifier, par le nombre de Reynolds, que l'écoulement dans le capillaire est bien laminaire.

EXERCICE N° 2.7

Une petite boule sphérique, de masse volumique $\rho_0=2.10^3$ (Kg/m^3) et de rayon $r=10.10^{-6}$ (m), complètement immergée dans un liquide calme, de masse volumique $\rho_1= 10^{3}$ (kg/m^3) et de coefficient de viscosité dynamique η, est abandonnée sans vitesse initiale. Le liquide exerce sur la boule une force visqueuse $\vec{f_v}=-C\vec{V}$. C étant une constante positive qui vaut $18,84.10^{-8}$ (MKSA).

1°-Déterminer l'expression littérale donnant la vitesse de la boule en fonction du temps. Tracer son allure.

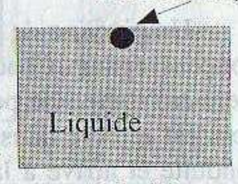
2°- Au bout de combien de temps la vitesse de la boule sera-t-elle égale à 0,99 fois sa vitesse maximale? Conclusion.

3°-Sachant que l'expression littérale de $\vec{f_v}$ est: $\vec{f_v}=-6\pi\eta r\vec{V}$ (formule de Stockes) et que la boule met un temps $t_0=900$ (s) pour parcourir une distance $d_0=20$ (cm); déterminer la valeur du coefficient de viscosité dynamique, η, du liquide.

4°- En fait, le liquide, en question, comporte des particules en suspension., supposées sphériques et de masse volumique ρ_0. Au bout de quel temps les particules de rayon $r_0 > 2\ 10^{-6}$ (m) ne seront plus en suspension dans ce liquide; la profondeur du liquide est $d_0 = 20$ (cm).

EXERCICE N° 2.8

On considère une bille, sphérique et de masse volumique $\rho_0=7,8$ (g/cm^3). Lorsque on l'abandonne sans vitesse initiale dans un récipient plein d'eau Fig(7), elle met 2 (s) pour atteindre le fond. Quand on remplace l'eau par un autre liquide x, la même bille, dans les mêmes conditions que précédemment, met 9 (s) pour atteindre le fond du récipient. Sachant que la viscosité de l'eau est de $1,14\ 10^{-2}$ poise et que les masses volumiques de l'eau et du liquide x valent, respectivement, 1 (g/cm^3) et 1,06 (g/cm^3), déterminer le coefficient de viscosité cinématique ν_x du liquide x.



Fig(7)

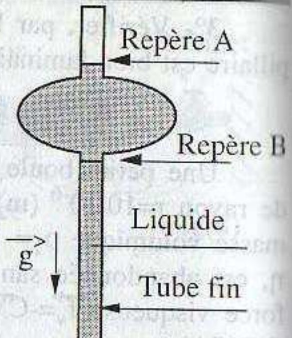
EXERCICE N° 2.9

Dans un viscosimètre à écoulement Fig(10), le volume V_0 d'eau, contenu entre les repères A et B, met 10 (s) pour s'écouler alors que le même volume d'un autre liquide, de masse volumique 1,06 (g/cm^3), en met

42 (s) à la température ambiante de 16 (°C). A cette température, la viscosité et la masse volumique de l'eau sont, respectivement, de 1,14 10^{-2} poise et de 1 (g/cm^3).

1°- Quelle est la valeur de la constante "a" de ce viscosimètre.

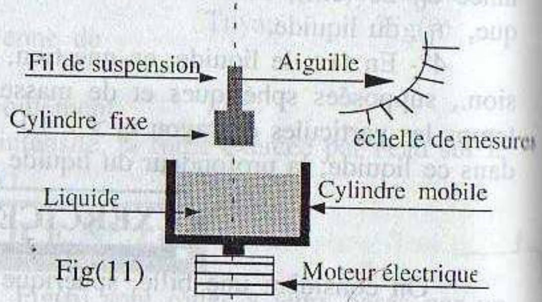
2°- Déterminer le coefficient de viscosité dynamique du liquide inconnu à 16 (°C).



Fig(10)

EXERCICE N° 2.10

Dans un viscosimètre à entraînement Fig(11), le cylindre mobile est entraîné par un moteur électrique dont la vitesse de rotation ω_0 est constante. A l'arrêt et à une température ambiante de 16 (°C), on verse un volume V_0 de sang frais dans ce cylindre (Volume indiqué par un repère) puis on met le moteur électrique en marche. Après quelques secondes, on abaisse le cylindre fixe. On s'aperçoit alors que l'aiguille qui lui est solidaire a subie une rotation de 44°, par rapport à sa position initiale et dans le sens de rotation du cylindre mobile. Quand on refait la même expérience avec de l'eau, l'aiguille, solidaire au cylindre fixe, ne tourne que d'un angle 10°. sachant que la viscosité cinématique de l'eau à 16 (°C) est de 1,14$10^{-2}$(St), déterminer le coefficient de viscosité dynamique du sang frais.



Fig(11)

EXERCICE N° 2.11

Un pipeline de 720 (Km) à un diamètre de 30 (cm). Il est composé de 6 tronçons égaux. Chacun des tronçons aboutit à une station de pompage. La première station de pompage est placée au point de départ du pipeline. Le pétrole est refoulé dans le pipeline avec la pression P_{max} que peut supporter la conduite et arrive à la station suivante à la pression atmosphérique; la même opération est répété au niveau de chaque station de pompage. Le débit massique du pipeline est de 10^6 (Kg/jour). La masse volumique et le coefficient de viscosité dynamique du pétrole sont: 0,85 (g/cm^3) et 1 (poise). Pour l'un des tronçons du pipeline, déterminer:

1°- La nature de l'écoulement..

2°- La perte de charge et la pression maximum du pétrole.

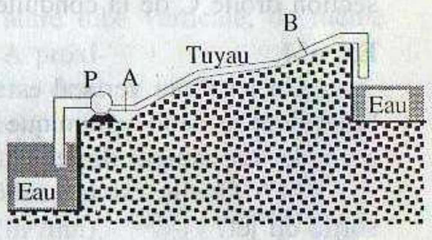
Cette série d'exercices est celle proposée aux étudiants des troncs communs: de biologie, des sciences de la terre et de l'agronomie (STA) et des sciences de la nature et de la vie (SNV) des Universités: de l'USTHB, de Blida et de Tizi ouzou, ainsi qu'aux CBM (au centre biomédical) de Dargana et de Tizi ouzou. Les étudiants concernés pourront donc l'utiliser en même temps que le fascicule. En quelque sorte, elle constitue pour eux un bon moyen de vérification de l'assimilation du cours. Les solutions détaillées de ces exercices ne sont, bien sûr, pas données dans ce fascicule. Cependant, dans la partie solutions, nous avons donné les réponses aux questions, sans explications, pour que l'étudiant sache si ses réponses sont justes ou fausses.

Loi de conservation de masse

Ex. n°1.

Un tuyau de section variable est utilisé comme moyen de transport d'eau. L'une de ses extrémités est reliée à la sortie d'une pompe P, dont le débit est de 0,2 (l/s), et l'autre sert à alimenter un grand réservoir (Cf. Figure).

Aux points A et B du tuyau, les sections droites valent, respectivement, 10 (cm^2) et 5 (cm^2). Déterminer:

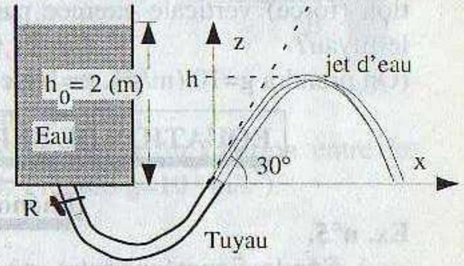


1°- les vitesses moyennes d'écoulement de l'eau dans les section A et B.

2°- la quantité d'eau recueillie dans le réservoir après 15 (mn)?

Ex. n°2.

Le réservoir de la figure ci-contre a une section interne S=2 (m^2) et un robinet de vidange R, de section droite s=1 (cm^2).



On branche un tuyau en caoutchouc sur le robinet R et on place l'autre extrémité comme indiqué sur la figure; la section droite et terminale du tuyau vaut 0,5 (cm^2). Ensuite, on verse de l'eau (ρ_e=1 (g/cm^3)) sur une hauteur h_0 de 2 (m) dans le réservoir et on ouvre complètement le robinet R.

Une fois que le régime d'écoulement permanent est établi (quelques secondes après l'ouverture de R), on s'aperçoit que le débit du tuyau est de 24 litres par minute.

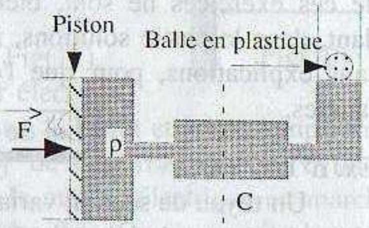
1°- Déterminer la vitesse moyenne de l'eau dans une section droite du robinet R.

2°- Calculer la hauteur h et la portée x du jet d'eau sortant du tuyau. On prendra g=10 (m/s^2) et on négligera les frottement de l'air.

Ex. n°3.

Dans le dispositif de la figure ci-contre, le diamètre du piston est de 40 (cm) et la section uniforme tube vertical vaut 314 (cm^2). Quant à la masse volumique du liquide, elle vaut ρ=0,8 (g/cm^3). La balle en plastique, de diamètre inférieur à celui du tube vertical, flotte sur la surface libres du liquide.

On déplace le piston, dans le sens indiqué sur la figure, avec une vitesse constante V=2,5 (mm/s).

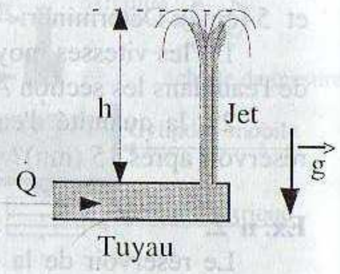


1°- Dans quel sens et avec quelle vitesse se déplacera la balle en plastique?

2°- Quels sont les débits volumique et massique du liquide à travers la section droite C de la conduite horizontale?

Ex. n°4.

Un jet d'eau vertical est alimenté par un robinet dont le débit volumique est de 0,3 litre à la seconde. La hauteur du jet est de 11,25 (m).



1°- Quelle est la section s de l'orifice de sortie du jet?

2°- Quelle est, en sens et en intensité, l'action (force) verticale exercée par le jet d'eau sur le tuyau?

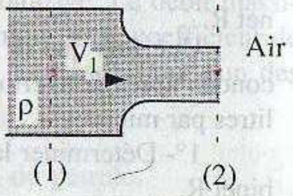
(On prendra g=10 (m/s^2), ρ=1(g/cm^3) et on négligera les frottements de l'air).

EQUATION DE BERNOULLI ET APPLICATIONS

Phénomène de Venturi

Ex. n°5.

Sur la figure ci-contre, on a représenté la partie terminale et horizontale d'une conduite à l'intérieur de laquelle circule un liquide, supposé parfait et de masse volumique ρ=0,9 (g/cm^3). L'écoulement est permanent. Aux points (1) et (2), les sections droites et les pressions valent, respectivement, S_1=17,32 (cm^2), S_2=10 (cm^2), P_1=1,005 10^5 (N/m^2) et P_2=10^5 (N/m^2). Déterminer:

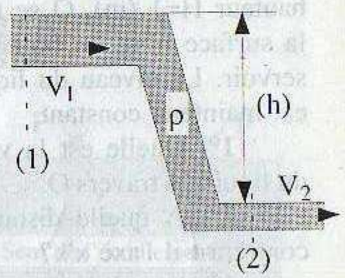


1°- Les vitesses du liquide aux points (1) et (2).
2°- Le débit massique de la conduite.

Ex. n°6.

Dans la conduite ci-contre, l'écoulement du liquide, de masse volumique ρ=1,02 (g/cm^3), est supposé permanent. Les sections droites horizontales, (1) et (2), sont telles que: $S_1=2S_2$ et le liquide est supposé parfait.

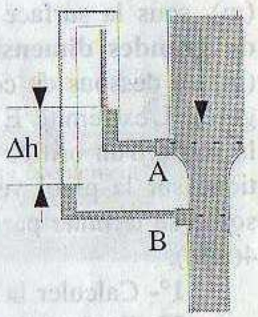
Déterminer la vitesse de l'écoulement V_1 dans la section (1) et la pression P_2 dans la section (2); sachant que la pression dans la section (1) est P_1=1,0410^5 (N/m^2), la vitesse dans la section (2) est V_2=1 (m/s) et que h= 50 (cm). Les diamètres de S_1 et de S_2 sont supposés très faibles devant h.



Ex. n°7.

Un tube verticale, de forme cylindrique et de diamètre D=0,4 (m), présent un rétrécissement qui le raccorde à un autre tube verticale, de même axe de révolution et de diamètre d=0,20 (m). A proximité des points de raccordement se trouvent deux prises de pressions statique A et B (Cf. Figure).

La conduite, constituée par les deux tubes, est parcourue, en permanence, par un courant d'eau descendant, dont le débit est constant et vaut 3,6 (m^3/mn).

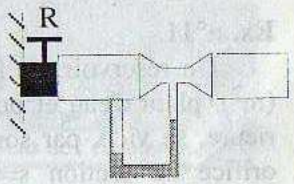


1°- Déterminer la différence des pressions statiques ($\Delta P=P_B-P_A$). Sachant que les sections horizontales passant par A et B sont distantes de 0,12 (m).

2°- On branche les extrémités d'un tube en U, renversé, vertical et contenant initialement de l'air, aux points A et B (Cf. Figure). Quelle dénivellation Δh lirait-on entre les surfaces libres de liquide dans le tube en U. Prendre g=10 (m/s^2).

Ex. n°8.

Une conduite horizontale, de forme circulaire et de rayon r=1,5 (cm), est branchée à un robinet d'eau. En son milieu, elle est muni d'un tube de venturi (Cf. Figure). la partie rétrécie du tube a un rayon de 7,5 (mm).

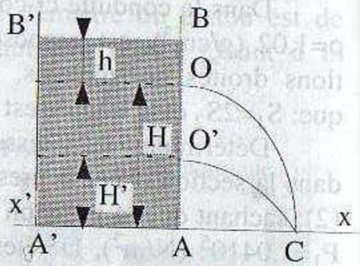


Quant on ouvre à fond le robinet d'eau, la hauteur h de dénivellation, entre les deux niveau de mercure, est de 11 (mm). Déterminer le débit volumique du robinet.

Ecoulement à travers un orifice (Torrecelli)

Ex. n°9:

Le réservoir de la figure ci-contre, ouvert à l'air libre, repose sur un plan horizontal contenant l'axe x'x. Un orifice O est pratiqué dans la paroi verticale AB à la hauteur H=1 (m). O se trouve à h=0,3 (m) de la surface libre du liquide contenu dans le réservoir. Le niveau du liquide dans le réservoir est maintenu constant.



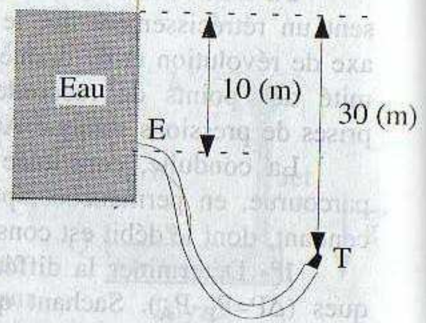
1°- Quelle est la vitesse de l'écoulement du liquide à travers O.

2°- A quelle distance x=AC, le jet rencontrera-t-il l'axe x'x?

3°- A quelle hauteur H' faut-il percer un autre orifice O', de même section que le précédent, pour que le second jet ait la même portée que le premier?

Ex. n°10:

L'entrée E d'un tuyau se trouve à 10 (m), sous la surface libre d'un réservoir d'eau **de grandes dimensions**, et sa sortie T à 30 (m) au dessous de cette même surface (Cf. figure). L'extrémité E du tuyau est branché sur la sortie d'un orifice de diamètre 8 (mm), pratiqué sur la paroi verticale du réservoir, et sa sortie se termine par une tuyère T de diamètre 4(mm).



1°- Calculer la vitesse moyenne du jet d'eau à la sortie de la tuyère.

2°- Quel est le débit en eau du tuyau?

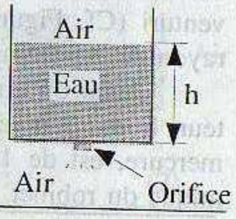
3°- Au régime d'écoulement permanent, déterminer les pressions en E et à l'amont de la tuyère T. On négligera la longueur de la tuyère et supposera que l'eau est un fluide parfait.

4°- En négligeant les frottements de l'air, quelle est la hauteur maximale que le jet d'eau peut atteindre? Expliquer.

On donne $P_0=10^5$ (N/m^2), $\rho_e=1$ (g/cm^3) et $g=10$ (m/s^2).

Ex. n°11.

Un réservoir, de forme cubique, de section $S=a^2=10$ (m^2), plein d'eau et ouvert à l'air libre par sa partie supérieure, se vide, par son fond horizontal, à travers un petit orifice de section $s=0,5$ (dm^2). L'orifice débouche sur



l'air atmosphérique.

1°- Exprimer, en fonction des données, le débit volumique de l'eau à travers l'orifice.

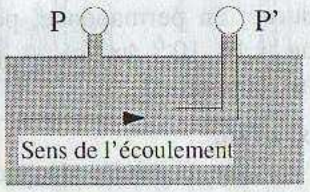
2°- Quel est le temps nécessaire à sa vidange complète.

On prendra $g=10$ (m/s^2).

Mesure de vitesses (Pitot)

Ex. n°12.

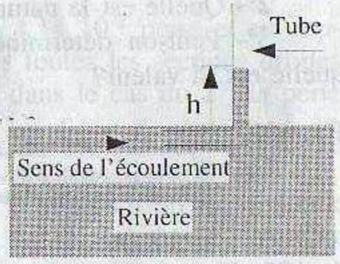
Pour mesurer la vitesse d'un écoulement, permanent et établi dans une conduite horizontale, on a placé, comme indiqué sur la figure ci-contre, deux manomètres P et P'. Les lectures faites sur ces manomètres donnent: P=100 (N/m^2) et P'= 120 (N/m^2). La masse volumique du liquide est $\rho=1,06$ (g/cm^3).



En supposant le liquide parfait, déterminer sa vitesse d'écoulement dans la conduite.

Ex. n°13.

Pour mesurer la vitesse d'écoulement de l'eau dans une rivière, un employé municipal utilise un tube, de section uniforme S=1 (cm^2), recourbé en forme d'un L (Cf. Figure). Il le dispose dans le sens du courant, comme indiqué sur la figure, puis il relève la hauteur d'eau dans la portion verticale du tube.



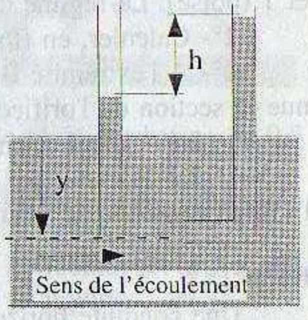
Sur son dernier relevé, on lit h=2,5 (cm). Quelle la vitesse du courant d'eau?

(Pendre g= 10 (m/s^2)).

Ex. n°14.

Une conduite, horizontale et de section uniforme, est parcourue par un liquide réel. L'écoulement est supposé, permanent, établi et laminaire.

Dans la partie supérieure de la conduite et suivant la verticale, on a introduit deux tubes fins, comme indiqué sur la figure ci-contre; on peut lire sur ces derniers la hauteur de dénivellation h entre les deux surfaces libres du liquide.



1°- Avec ce système de tubes, montrer que l'on peut déterminer le champ des vitesses dans une section droite de la conduite. Expliquer.

2°- Pour la position de la figure, la dénivellation h vaut 2 (cm); quelle est la vitesse du liquide à cette profondeur y ?

FLUIDE RÉEL

Ecoulement dans une conduite de section circulaire

Ex. n°15.

Une conduite, de section circulaire et de diamètre 10 (cm), est parcourue, en permanence, par un liquide de coefficient de viscosité cinématique $1,14\ 10^{-6}$ (m^2/s). À partir de quel débit le régime d'écoulement n'est plus laminaire?

Ex. n°16.

Une conduite de section circulaire, de rayon R=1,5 (cm) et de longueur 10 (m), est parcourue par une huile de masse volumique 0,95 (g/cm^3) et de coefficient de viscosité dynamique 0,02 poises. Le débit volumique de la conduite est de 5 (l/mn).

1°- Déterminer le nombre de Reynolds de l'écoulement.

2°- Quelle est la nature de l'écoulement.

3°- Peut-on déterminer la perte de charge dans la conduite? Si oui, quelle est sa valeur?

Ex. n°17.

Un tuyau d'arrosage, de section circulaire et de diamètre 1 (cm), a une longueur de 10 (m). Il est branché, en A (Cf. Figure), à une alimentation en eau, fournissant une pression de $1,00038 10^5$ (N/m^2). La pression à son orifice B, de sortie de l'eau, est la pression atmosphérique (10^5 (N/m^2)). La masse volumique et le coefficient de viscosité dynamique de l'eau, à la température ambiante, sont 1 (g/cm^3) et 1 (poise). Le régime d'écoulement est supposé laminaire.

1°- Calculer, en (l/mn), le débit de l'eau dans le tuyau.

2°- À l'extrémité B du tuyau, on place une pièce tronconique qui diminue la section de l'orifice; la section en C a un diamètre de 6 (mm).

2.1- Calculer, en (l/mn), le nouveau débit du tuyau.

2.2- L'extrémité du tuyau étant horizontale; déterminer l'intensité de la force exercée par l'eau sur la section de sortie du tuyau.

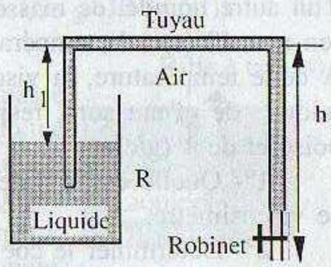
Ex. n°18.

Une conduite horizontale, de diamètre 0,1 (m) et de longueur 10 (Km),

est parcourue, en permanence, par une huile, de masse volumique 920 (Kg/m^3) et de viscosité dynamique 0,87 poise. Le débit volumique de l'huile, à travers cette conduite, est de 50 (m^3/h).

Quelle est la différence de pression ΔP entre l'entrée et la sortie de cette conduite?

Ex. n°19 (Siphon).



On se propose d'utiliser l'eau contenue dans un réservoir R, de grandes dimensions. Pour cela, on utilise un tuyau de 20 (m) de longueur, muni d'un robinet à l'une de ses extrémités et rempli également du même liquide; l'autre extrémité est bouchée (Cf. Figure). Après introduction de l'extrémité du tuyau, muni d'un bouchon, dans le réservoir R, on supprime son bouchon et on ouvre le robinet à fond. Le diamètre maximum du robinet est de 2 (cm) et la hauteur h_1 est de 4 (m). Prendre g=10 (m/s^2).

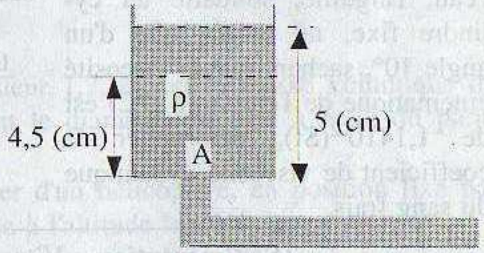
1°- A partir de quelle hauteur h_2, l'eau coulera-t-elle du robinet?

2°- Quel est le débit maximum du tuyau, en (l/mn), pour lequel l'écoulement est laminaire?

3°- En prenant la viscosité de l'eau égale à $1,14\ 10^{-2}$ poise et en supposant que le profil des vitesses est le même dans toutes les sections droites du tuyau (celles des coudes comprises), calculer, dans le cas du 2°, la perte de charge ΔP dans le tuyau et la hauteur h_2.

Mesure du coefficient de viscosité - Viscosimètre

Ex. n°20.



Un récipient, de forme cylindrique et de 5 (cm) de diamètre, communique avec un tube horizontal, de diamètre 2 (mm) et de longueur 20 (cm) Cf. Figure. On le remplit d'un liquide de masse volumique ρ=0,8 (g/cm^3) puis, on laisse couler ce dernier à travers le tube, de terminaison horizontale Cf. Figure. Il a fallu 18,8 (mn) pour que le niveau du liquide dans le récipient baisse de 0,5 (cm).

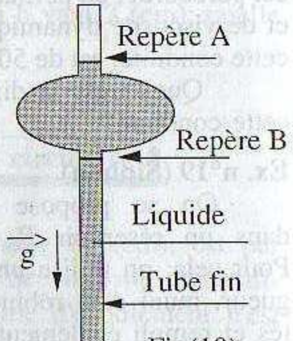
1°- Calculer, entre l'état initial et l'état final, les différences de pression entre les points A et B.

2°- En supposant que l'écoulement dans le tube horizontal est un écoulement de Poiseuille, déterminer la viscosité dynamique du liquide.

3°- L'hypothèse de l'écoulement de Poiseuille est elle justifiée? expliquer.

Ex. n°21.

Dans un viscosimètre à écoulement Fig(10), le volume V_0 d'eau, contenu entre les repères A et B, met 10 (s) pour s'écouler alors que le même volume d'un autre liquide, de masse volumique 1,06 (g/cm^3), en met 42 (s) à la température ambiante de 16 (°C). A cette température, la viscosité et la masse volumique de l'eau sont, respectivement, de 1,14 10^{-2} poise et de 1 (g/cm^3).



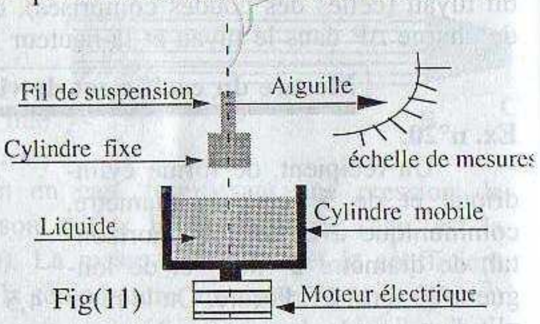
Fig(10)

1°- Quelle est la valeur de la constante "a" de ce viscosimètre.

2°- Déterminer le coefficient de viscosité dynamique du liquide inconnu à 16 (°C).

Ex. n°22.

Dans un viscosimètre à entraînement Fig(11), le cylindre mobile est entraîné par un moteur électrique dont la vitesse de rotation ω_0 est constante. A l'arrêt et à une température ambiante de 16 (°C), on verse un volume V_0 de sang frais dans ce cylindre (Volume indiqué par un repère) puis on met le moteur électrique en marche. Après quelques secondes, on abaisse le cylindre fixe. On s'aperçoit alors que l'aiguille qui lui est solidaire a subie une rotation de 44°, par rapport à sa position initiale et dans le sens de rotation du cylindre mobile. Quand on refait la même expérience avec de l'eau, l'aiguille, solidaire au cylindre fixe, ne tourne que d'un angle 10°. sachant que la viscosité cinématique de l'eau à 16 (°C) est de 1,14$10^{-2}$(St), déterminer le coefficient de viscosité dynamique du sang frais.



Fig(11)

Sédimentation - Vitesse de sédimentation

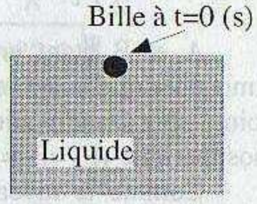
Ex. n°23.

Un récipient contient un liquide, de viscosité $\eta=10^{-3}$ (kg/ms) et de masse volumique $\rho=1$ (g/cm^3), dans lequel des particules, de rayon r et de masse volumique $\rho'=2{,}8$ (g/cm^3), se trouvent en suspension.

1°- Déterminer l'expression littérale de la vitesse limite des particule, en suspension, en fonction de leur rayon r.

2°- Le rayon r varie selon la particule considérée et la hauteur du liquide dans le récipient est de 30 (cm). En négligeant le temps nécessaire à l'établissement de la vitesse limite, déterminer le temps de sédimentation (temps nécessaire aux particules pour atteindre le fond du récipient) des particules dont le rayon est supérieur à 10 (μm). (prendre g=10 (m/s^2)).

Ex. n°24.



On considère une bille, sphérique et de masse volumique $\rho_0=7{,}8$ (g/cm^3). Lorsque on l'abandonne sans vitesse initiale dans un récipient plein d'eau Cf. Figure, elle met 2 (s) pour atteindre le fond. Quand on remplace l'eau par un autre liquide x, la même bille, dans les mêmes conditions que précédemment, met 9 (s) pour atteindre le fond du récipient. Sachant que la viscosité de l'eau est de 1,14 10^{-2} poise et que les masses volumiques de l'eau et du liquide x valent, respectivement, 1 (g/cm^3) et 1,06 (g/cm^3), déterminer le coefficient de viscosité cinématique ν_x du liquide x.

Résistance de l'air au mouvement d'un corps solide

Ex. n°25.

Un parachutiste et son parachute ont une masse totale de 120 (Kg). Le diamètre du parachute, quand il est ouvert, est de 6 (m). La résistance de l'air, dans ce cas, est:

$$F_a = K V^2$$

avec: $K = \frac{1}{2} C \rho_a S$

où: C est une constante de valeur 1,2, ρ_a est la masse volumique de l'air et S la surface d'un disque dont le diamètre est égal à celui du parachute, quand il est ouvert.

Le parachutiste se laisse tomber d'un hélicoptère, en position fixe par rapport au sol, et ouvre son parachute à l'altitude h=8000 (m).

1°- Quelle sera la vitesse du parachutiste:

1.1- à l'altitude 100 (m)?

1.2- à l'altitude 1 (cm)?

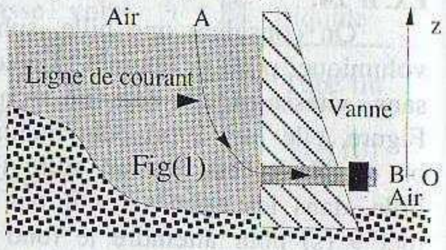
2°- De quelle hauteur devrait-il sauter pour arriver à 1 (cm) du sol, avec la même vitesse qu'au 1.2?

On négligera la résistance de l'air pour la 2° question et on prendra, pour toutes les questions de l'exercice, g=10 (m/s^2) et ρ_a=1,25 (kg/m^3).

SOLUTION DE L'EXERCICE N°2.1

1°- Sur une ligne de courant, partant d'un point A de la surface libre de l'eau du barrage et aboutissant à un point B de la sortie de la vanne Fig(1), l'équation de Bernoulli s'écrit:

$$\frac{1}{2}\rho_e V_A^2 + \rho_e g z_A + P_A = \frac{1}{2}\rho_e V_B^2 + \rho_e g z_B + P_B$$



Fig(1)

A et B étant en contact avec l'air atmosphérique, les pressions en ces points sont donc égales à la pression atmosphérique (P_A=P_B=P_0).

Comme le niveau du barrage reste constant, la vitesse V_A du point A est nulle.

z_A et z_B valent, respectivement, h=19 (m) et 0 (m).

En remplaçant dans l'équation de Bernoulli V_A, P_A, P_B, z_A et z_B par leurs expressions et après simplification, on obtient:

$$g\,h = \frac{1}{2}V_B^2$$

D'où la vitesse de l'eau à la sortie de la vanne.

$$V_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(10)(19)} \approx 19,5\ (m/s)$$

En négligeant le diamètre de la vanne devant z_A, le débit volumique de la vanne est:

$$\mathring{Q} = s\,V_B = 314\,10^{-4}(m^2)\,19,5\,(m/s) \approx 0,6123\ (m^3/s)$$

2°- Une masse dm d'eau, sortant de la vanne, transporte une énergie cinétique dE_c telle que:

$$dE_c = \frac{1}{2}dm\,V_B^2$$

Si dt est le temps mis par la masse dm pour sortir de la vanne, la puissance p, transportée par cette eau, s'exprimera comme suit:

$$p = \frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}V_B^2 = \frac{1}{2}\mathring{m}\,V_B^2$$

où $\mathring{m}$ est le débit massique de l'eau.

Donc la puissance p_v , débitée par la vanne, s'écrit:

$$p_v = \frac{1}{2}\mathring{m}_v\,V_B^2 = \frac{1}{2}\rho_e\,\mathring{Q}\,V_B^2 = \frac{1}{2}\rho_e\,s\,V_B^3$$

La puissance fournie à l'alternateur est donc:

$$p_v = \frac{1}{2}(10^3)(314\,10^{-4})(19,5)^3 \approx 116414\ (W) = 116,414\ (KW)$$

Comme le rendement de l'installation est de 80%, La puissance électrique p_a fournie par l'alternateur est:

$$p_a = \frac{80}{100}p_v = (0,8)(116,414) \approx 93,131\ (KW)$$

SOLUTION DE L'EXERCICE N°2.2

1°- La variation de pression, ΔP=P_B-P_A, peut s'écrire comme suit:

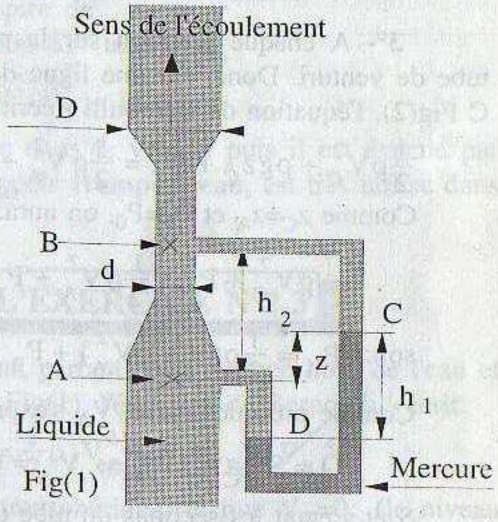
$$\Delta P = (P_B - P_C) + (P_C - P_D) + (P_D - P_A) \qquad (1)$$

Au moyen de la relation fondamentale de l'hydrostatique, on peut évaluer les différences de pression du second membre de la relation (1). En effet; d'après la Fig(1), on a:

$$P_B - P_C = -\rho' g (h_2 - z)$$

$$P_C - P_D = -\rho g h_1$$

et: $$P_D - P_A = \rho' g (h_1 - z)$$



Fig(1)

En les remplaçant par leurs expressions dans l'équation (1), on obtient la relation demandée; soit:

$$\Delta P = (\rho' - \rho) g h_1 - \rho' g h_2$$

2°- Sur une ligne de courant, passant par les points A et B, l'équation de Bernoulli s'écrit:

$$\frac{1}{2}\rho' V^2 + \rho' g z_A + P_A = \frac{1}{2}\rho' v^2 + \rho' g z_B + P_B$$

où: V, v, z_A et z_B sont, respectivement, Les vitesses du liquide aux points A et B et les cotes de ces derniers.

A partir de l'équation de conservation de débit volumique dans le tube, on peut exprimer v en fonction de V; soit:

$$(SV = \pi\frac{D^2}{4}V) = (sv = \pi\frac{d^2}{4}v) \Rightarrow v = (\frac{D}{d})^2 V = 4V$$

En remplaçant v par sa valeur dans l'équation de Bernoulli, on obtient:

$$\frac{1}{2}\rho' V^2(1-16) = \rho' g(z_B - z_A) + (P_B - P_A)$$

soit: $$-\frac{15}{2}\rho' V^2 = \rho' g h_2 + \Delta P$$

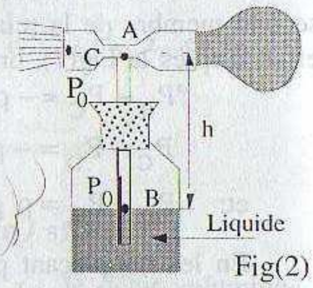
D'où l'expression et la valeur de la vitesse V du liquide dans la partie large du tuyau.

$$V = \sqrt{\frac{\rho' g h_2 + [(\rho' - \rho) g h_1 - \rho' g h_2]}{-7,5\rho'}} = \sqrt{\frac{(\rho - \rho') g h_1}{7,5\rho'}}$$

A.N: $$V = \sqrt{\frac{(13,6-1)(10)(0,30)}{7,5}} \approx 2,25\ (m/s)$$

3°- A chaque pression sur la poire, on fait circuler de l'air dans le tube de venturi. Donc, sur une ligne de courant, passant par les points A et C Fig(2), l'équation de Bernoulli s'écrit:

$$\frac{1}{2}\rho V_C^2 + \rho g z_C + P_C = \frac{1}{2}\rho V_A^2 + \rho g z_A + P_A$$



Fig(2)

Comme $z_C = z_A$ et $P_C = P_0$, on aura:

$$\frac{1}{2}\rho V_C^2 + P_0 = \frac{1}{2}\rho V_A^2 + P_A$$

soit: $$P_A = \frac{1}{2}\rho(V_C^2 - V_A^2) + P_0 \qquad (2)$$

Comme précédemment, V_A s'exprime en fonction de V_C comme suit:

$$\overset{\circ}{Q} = SV_C = sV_A \Rightarrow V_A = \left(\frac{S}{s}\right) V_C \qquad (3)$$

S et s étant les sections du tube dans ses parties large et rétrécie.

En remplaçant V_A par son expression (3) dans la relation (2), on obtient:

$$P_A = P_0 - \frac{1}{2}\rho V_C^2\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right) < P_0$$

La pression au point B étant égale à la pression atmosphérique P_0, on peut donc exprimer la variation de pression $\Delta P'$ entre les points B et A; soit:

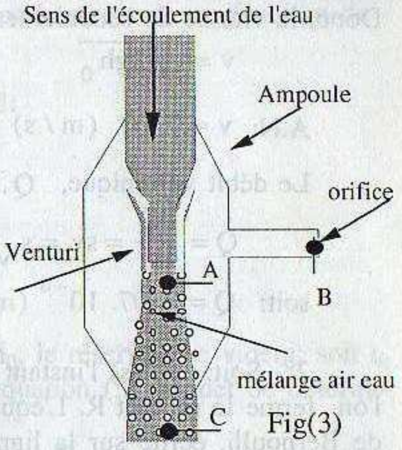
$$\Delta P' = P_A - P_B = -\frac{1}{2}\rho V_C^2\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right) < 0$$

P_A étant inférieure à P_B, le liquide du flacon est donc aspiré vers A. Si la hauteur $h < (\Delta P'/\rho' g)$ Fig(2), le liquide arrivera à la section A du tube et sera entraîné par l'écoulement d'air; d'où sa pulvérisation. ρ' est évidemment la masse volumique du liquide.

4°- En raisonnant sur les points A,B et C Fig(3), on peut montrer, de la même manière qu'au 3°, que la pression P_A dans le venturi, donc dans l'ampoule, est égale à:

$$P_A = P_0 - \frac{1}{2}\rho_e V^2\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right) < P_0$$

V et ρ_e étant la vitesse d'écoulement de l'eau dans la partie large du tube de venturi et sa masse volumique.



Fig(3)

Comme cette pression est inférieure à la pression atmosphérique, l'ampoule, par son orifice B Fig(3), joue le rôle d'une pompe à vide; c'est à dire qu'elle aspire de l'air par son orifice avec une dépression $\Delta P''$ telle que:

$$\Delta P'' = P_A - P_B = -\frac{1}{2}\rho V^2\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right)$$

L'air aspiré se mélange à l'eau dans le venturi puis il est évacué par cette dernière. Un pareil dispositif, appelé **trempe à eau,** est très utilisé dans les laboratoires d'analyses.

SOLUTION DE L'EXERCICE N°2.3

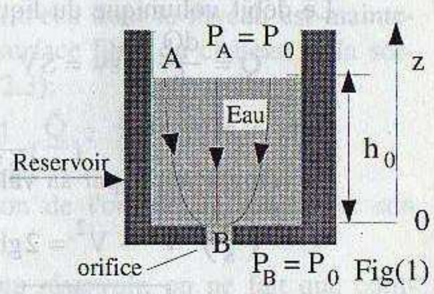
1°-Sur l'une les lignes de courant, partant de la surface libre de l'eau et aboutissant à la section s de l'orifice Fig(1), l'équation de Bernoulli s'écrit:

$$\frac{1}{2}\rho_e V_A^2 + \rho_e g z_A + \cancel{P_A} = \frac{1}{2}\rho_e V_B^2 + \rho_e g z_B + \cancel{P_B}$$

Comme $P_A = P_B = P_0$ (pression atmosphérique) et que $V_A = 0$ (le niveau de l'eau est maintenu constant), l'équation précédente devient:

$$g(z_A - z_B) = \frac{1}{2}V_B^2$$

soit: $$g h_0 = \frac{1}{2}v^2$$



Fig(1)

où: $h_0 = z_A - z_B$ et $v = V_B$, la vitesse de l'eau à la sortie de l'orifice.

D'où: $$v = \sqrt{2gh_0}$$

Remarque: Puisque toutes les lignes de courant, partant de la surface horizontale de côte $z = h_0$, aboutissent à la section horizontale de côte $z = 0$, le résultat précédent est valable quelle que soit la ligne de courant considérée.

Donc, la vitesse de l'écoulement à la sortie de l'orifice est:

$$v = \sqrt{2gh_0}$$

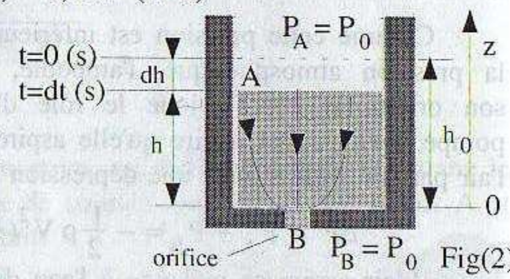
A.N: $v \approx 7,07 \quad (m/s)$

Le débit volumique, Q, à travers l'orifice, de section s, est alors:

$$\overset{\circ}{Q} = \frac{dQ}{dt} = sv = s\sqrt{2gh_0}$$

soit: $Q = 7,07.\,10^{-4}\ (m^3/s) = 0,707\ (l/s)$

2°- Soit: t=0 (s) l'instant où l'on ferme le robinet R. L'équation de Bernoulli, écrite sur la ligne de courant AB, est la même que celle du **1°**. Cependant, la vitesse du point A qui était immobile ($V_A=0$) dans la 1° question ne l'est plus dans cette question. Donc, $V_A=V\neq0$. L'équation de Bernoulli s'écrit, alors:



Fig(2)

$$\frac{1}{2}\rho_e V^2 + \rho_e g z_A + \cancel{P_A} = \frac{1}{2}\rho_e v^2 + \rho_e g z_B + \cancel{P_B}$$

soit: $\frac{1}{2}(v^2 - V^2) = gh \qquad (1)$

où: $V = V_A,\ v = V_B$ et $h = (z_A - z_B)$

La variation, $dh=h_0-h$ de la hauteur du liquide, dans le réservoir et durant un intervalle de temps dt, est:

$$dh = Vdt$$

h étant la hauteur du liquide dans le réservoir à l'instant t.

Le débit volumique du liquide à travers l'orifice s'écrit:

$$\overset{\circ}{Q} = \frac{dQ}{dt} = sv = SV$$

soit: $v = (\frac{S}{s})V \qquad (2)$

En remplaçant v par sa valeur (2) dans l'équation (1), on obtient :

$$\left(\frac{S}{s}\right)^2 V^2 - V^2 = 2gh$$

soit: $V = \sqrt{\dfrac{2gh}{\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1}} = \sqrt{\dfrac{2g}{\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1}}\ h^{+\frac{1}{2}}$

La variation de la hauteur du liquide dans le réservoir, en fonction de h, s'écrit alors :

$$dh = Vdt = \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1}} \cdot h^{+\frac{1}{2}}dt$$

soit: $h^{-\frac{1}{2}}dh = \sqrt{\dfrac{2g}{\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1}}\,dt \qquad (3)$

Lorsque la variation de h sera égale à h_0, le réservoir se videra; soit t_0 le temps qui sera écoulé. L'intégration de l'équation (3) permet de déterminer t_0 comme suit:

$$\int_0^{h_0}\sqrt{h}\ dh = \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1}}\int_0^{t_0}dt$$

soit: $2\sqrt{h_0} = \sqrt{\dfrac{2g}{\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1}}\ t_0$

D'où: $t_0 = \sqrt{\dfrac{2h_0}{g}\left(\dfrac{S^2}{s^2} - 1\right)} \approx 70,7\ \ (s)$

Remarque: plus le rapport ($\frac{S}{s}$) est grand, plus le temps de vidange l'est.

SOLUTION DE L'EXERCICE N°2.4

1°- Pour que le débit volumique, à l'air libre, d'un robinet soit constant,, il faudrait qu'il soit alimenté par un château d'eau dont le niveau est maintenu constant. La dénivellation h_0 , entre la surface libre du château et la sortie du robinet, est telle que (Cf. Sol. Ex. n°2.3):

$$\overset{\circ}{Q} = sv = s\sqrt{2gh_0} \Rightarrow h_0 = \frac{1}{2g}\left(\frac{\overset{\circ}{Q}}{s}\right)^2$$

s et Q sont, respectivement, la section de l'orifice du robinet et son débit maximum à l'air libre.

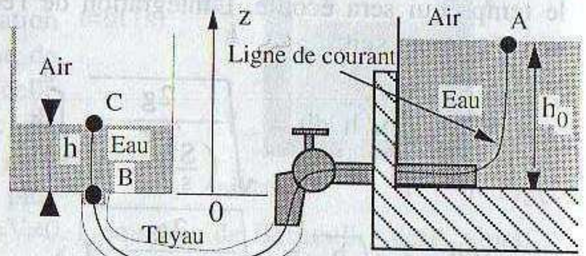
En fait, quant on branche le robinet au réservoir, on ne fait que communiquer le château d'eau avec ce dernier Fig(1). Donc, en vertu du principe des vases communicants, la hauteur maximale, susceptible d'être atteinte, dans le réservoir est telle que les deux surfaces libres de l'eau soient dans un même plan horizontal. Comme, dans notre cas, le robinet se trouve dans un même plan horizontal que le fond du réservoir, la hauteur maximale atteinte dans ce dernier est donc h_0; sa valeur numérique est:

$$h_0 = \frac{1}{2(10)}\left(\frac{0,55\,10^{-3}}{10^{-4}}\right)^2 \approx 1,5\ (m)$$

2°- Sur la ligne de courant ABC Fig(1), partant de la surface libre du château d'eau et aboutissant à la surface libre du réservoir, l'équation de Bernoulli s'écrit:

$$\frac{1}{2}\rho_e V_B^2 + \rho_e g z_B + P_B = \frac{1}{2}\rho_e v_A^2 + \rho_e g z_A + P_A$$

En remplaçant, dans l'équation de Bernoulli, V_A par 0 (niveau constant), P_A par P_0 (pression atmosphérique), P_B par $(\rho_e g h + P_0)$, z_A par h_0 et z_B par 0, on obtient:



Fig(1)

$$\frac{1}{2}V_B^2 + g\,h = g\,h_0$$

La vitesse V de déplacement de la surface libre de l'eau, dans le réservoir, se détermine à partir de l'équation de conservation de débit volumique; soit:

$$\mathring{Q} = sV_B = SV \Rightarrow V = \frac{s}{S}V_B = \frac{s}{S}\sqrt{2g(h_0 - h)}$$

Durant un intervalle de temps dt, le niveau d'eau dans le réservoir monte de dh tel que:

$$dh = Vdt = \frac{s}{S}\sqrt{2g(h_0 - h)}\,dt$$

On a donc:

$$dt = \frac{(h_0 - h)^{-\frac{1}{2}}\,dh}{\frac{s}{S}\sqrt{2g}}$$

Le temps t_0, nécessaire au remplissage du réservoir, s'obtient par intégration de l'équation ci-dessus; soit:

$$\int_0^{t_0} dt = \frac{S}{s\sqrt{2g}}\int_0^{h_0}(h_0 - h)^{-\frac{1}{2}}\,dh$$

En posant $X = h_0 - h$, l'intégrale du second membre s'écrit:

$$\int_0^{h_0}(h_0 - h)^{-\frac{1}{2}}\,dh = -\int_{h_0}^{0} X^{-\frac{1}{2}}\,dX = \int_0^{h_0} X^{-\frac{1}{2}}\,dX = \left[\frac{X^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{h_0} = 2\sqrt{h_0}$$

Le temps t_0, est alors:

$$t_0 = \frac{S}{s\sqrt{2g}}2\sqrt{h_0} = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \frac{1}{10^{-4}}\sqrt{\frac{2(1,5)}{10}} \approx 5,5\,10^3\ (s)$$

soit: $t_0 \approx 1,52\ (h)$

Remarques:

1- le temps de remplissage du réservoir, par le bas, est d'autant plus court que la section s de son orifice est grande.

2- Si le réservoir était au dessous du robinet (c'est à dire que son remplissage se ferait par le haut), on pourrait mettre plus d'eau dans ce réservoir et le temps t_1, nécessaire au remplissage de la même quantité d'eau que précédemment, sera plus court. En effet, on aura:

$$t_1 = \frac{S\,h_0}{\mathring{Q}} = \frac{1(m^2)1,5(m)}{0,55\,10^{-3}(m^3/s)} \approx 2727,3(s) < t_0 \approx 5500\ (s)$$

SOLUTION DE L'EXERCICE N°2.5

1°- La vitesse moyenne de l'écoulement se déduit de l'expression du débit volumique; soit:

$$\mathring{Q} = SV \Rightarrow V = \frac{\mathring{Q}}{S} = \frac{9,86\ (cm^3/s)}{3,14\ (cm^2)} = 3,14\ (cm/s).$$

2°- Le régime de l'écoulement dépend de la valeur du nombre de Reynolds; on doit donc le calculer.

$$\Re_e = \frac{V}{\nu}d$$

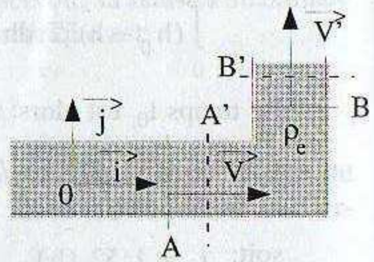
avec: $S = \pi\frac{d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4(3,14)\ (cm^2)}{3,14}} = 2\ (cm)$

et: $\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{1,14\,10^{-3}\ (\text{Poiseuille})}{10^3 (Kg/m^3)} = 1,14\,10^{-6}\ (m^2/s)$

soit: $\Re_e = \frac{3,14\,10^{-2}\ (m/s)}{1,14\,10^{-6}(m^2/s)}\,2\,10^{-2}\ (m) \approx 550,87$

Le nombre de Reynolds étant inférieur à 2300, le régime d'écoulement du liquide dans le tuyau est donc laminaire.

3°- Considérons, à l'instant t=0 (s), le liquide contenu dans le tube de courant, limité par les parois du tuyau et les sections droites A et B (Cf. Figure). À l'instant t'=t+dt, le même liquide se trouvera entre les sections A' et B'. Le régime étant stationnaire, tout se passe comme si, durant l'intervalle de temps dt, la masse liquide dm qui était entre les sections A et A' est passé entre les sections B et B' (Cf. cours page 60).



Les vecteurs vitesse $\vec V$ et $\vec{V'}$ de dm, aux instants t et t+dt, n'ayant pas la même direction, il s'en suit que dm a été soumis à une force $\vec f$, de la part du tuyau et durant l'intervalle de temps dt, telle que:

$$\vec f = \frac{\overrightarrow{dP}}{dt} = \frac{dm\,\vec{V'} - dm\vec V}{dt}$$

La loi de conservation de masse s'écrit:

$$dm = \rho_e S\,V\,dt = \rho_e S\,V'\,dt \quad \Rightarrow \quad V' = V$$

En vertu du principe de l'action et de la réaction (3ème loi de Newton), le liquide exerce une force $\vec{f'}$ sur le tuyau égale et opposée à $\vec f$; soit:

$$\vec{f'} = \frac{dm\vec V - dm\vec{V'}}{dt} = \frac{(\rho_e S V dt)\,V\,\vec i - (\rho_e S V dt)\,V\,\vec j}{dt}$$

c'est à dire: $\vec{f'} = \rho_e S V^2\,\vec i - \rho_e S V^2\,\vec j = \vec{f'}_x + \vec{f'}_y$

La force exercée par l'eau sur la conduite, dans la direction Oy, est donc: $\vec{f'}_y = -\rho_e S V^2\,\vec j$

son intensité vaut: $\rho_e S V^2 \approx 30,96\,10^{-5}$ (N) et elle est dirigée vers l'arrière du jet d'eau.

SOLUTION DE L'EXERCICE N°2.6

1°- Le débit volumique $\dot Q$ du liquide dans le capillaire est:

$$\mathring{Q} = \frac{V}{t} = \frac{3\,(cm^3)}{50\,(s)} = 0,06\ (cm^3/s)$$

2°- A partir de la loi de Poiseuille (Cf. cours), on peut déterminer le coefficient de viscosité cinématique du liquide. En effet, la loi de Poiseuille pour le tube capillaire s'écrit:

$$\mathring{Q} = \frac{\pi\,\Delta P}{8\eta L}\,r^4 \qquad (1)$$

Comme ΔP est la différence des pressions à l'entrée et à la sortie du tube, elle peut s'exprimer comme suit:

$$\Delta P = (\rho_e g h_1 + P_0) - (\rho_e g h_2 + P_0) = \rho_e g (h_1 - h_2)$$

En la remplaçant par son expression dans l'équation (1), on obtient:

$$\mathring{Q} = \frac{\pi \rho_e g (h_1 - h_2)}{8\eta L}\,r^4$$

D'où le coefficient de viscosité cinématique du liquide.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho_e} = \frac{\pi g (h_1 - h_2)}{8L\,\mathring{Q}}$$

$$\text{A.N:}\ \nu = \frac{\eta}{\rho_e} = \frac{3,14\,(10)\,(20-5)\,10^{-2}}{8\,(0,2)\,(6\,10^{-8})}\,(10^{-3})^4 \approx 0,49\,10^{-4}\,(m^2/s)$$

3°- La nature de l'écoulement est déterminée par la valeur de son nombre de Reynolds: dans un tube, il est laminaire quand sa valeur est inférieure à 2300.

On doit donc calculer le Reynolds de cet écoulement. Pour cela, on doit d'abord déterminer sa vitesse moyenne u_0 que l'on peut tirer du débit volumique du tube; soit:

$$\mathring{Q} = s\,u_0 = \pi r^2 u_0 \Rightarrow u_0 = \frac{\mathring{Q}}{\pi r^2} = \frac{6\,10^{-8}}{3,14\,(10^{-3})^2} \approx 1,91\,10^{-2}\,(m/s)$$

D'où la valeur du Reynolds.

$$\Re_e = \frac{u_0}{\nu}\,d = \frac{1,91\,10^{-2}}{0,49\,10^{-4}}\,(2\,10^{-3}) \approx 0,78$$

Comme il est inférieur à 2300, l'écoulement dans le tube capillaire est laminaire.

SOLUTION DE L'EXERCICE N°2.7

1°- Au cours de son mouvement, la boule sera soumise à son poids, $\vec{P_0} = m_0\vec g$, à la force de frottement visqueux, $\vec{f_v}$, et à la force de poussée d'Archiméde, $\vec\pi$, telles que:

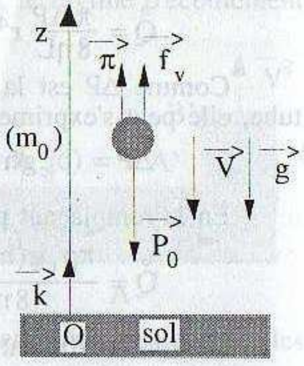
$$\vec{P_0} + \vec{f_v} + \vec\pi = m\vec a \qquad (1)$$

Les forces sont toutes verticales et leurs intensités, à un instant t quelconque, valent:

$$P_0 = m_0 g$$

$f_v = + C \|\vec{V}\| = - CV$, $(V < 0)$

$\pi = \rho_l \frac{4}{3} \pi r^3 g$



La projection de (1) sur Oz donne:

$$- m_0 g - CV + \rho_l \frac{4}{3} \pi r^3 g = m_0 a \qquad (2)$$

où: a et V sont les valeurs algébriques des projections, sur l'axe Oz, des vecteurs accélération, $\vec{a}$, et vitesse, $\vec{V}$, de la masse m_0.

Comme $a = \frac{dV}{dt}$ et $m_0 = \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3$, l'équation (2) s'écrit aussi comme suit:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{3C}{4\pi r^3 \rho_0} V = \frac{\rho_l - \rho_0}{\rho_0} g$$

soit: $$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{\tau} = \frac{\rho_l - \rho_0}{\rho_0} g \qquad (3)$$

où: $$\tau = \frac{4\pi r^3}{3C} \rho_0$$

L'équation différentielle (3) admet comme solution V(t) telle que:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t)$$

où: $V_1(t)$ est la solution de l'équation (3) sans second membre; c'est à dire:

$$\frac{dV_1}{dt} + \frac{V_1}{\tau} = 0 \qquad (4)$$

et $V_2(t)$ une solution particulière de l'équation (3) avec second membre. C'est en général, la solution de l'équation (3) quand la grandeur V cesse de varier; c'est à dire: $\frac{dV}{dt} = 0$.

Calcul de $V_1(t)$

La séparation des variables dans l'équation (4) donne:

$$\frac{dV_1}{V_1} = - \frac{dt}{\tau} \qquad (4')$$

On peut, donc, chercher, les primitives des deux membres de l'équation, soit:

$$\int \frac{dV_1}{V_1} = - \int \frac{dt}{\tau}$$

c'est à dire: $\mathrm{Log}(V_1) + C_1 = - \frac{t}{\tau} + C_2$

En posant $C_2 - C_1 = \mathrm{Log}(A) = \mathrm{Cte}$, l'équation ci-dessus s'écrit:

$$\mathrm{Log}(V_1) - \mathrm{Log}(A) = - \frac{t}{\tau}$$

soit: $\mathrm{Log}\left(\frac{V_1}{A}\right) = - \frac{t}{\tau}$

D'où: $V_1(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$

Calcul de $V_2(t)$

On peut remarquer que $\vec{P_0}$ et $\vec{\pi}$, sont des forces constantes. Quant à $\vec{f_v}$, son module varie au fur et à mesure que $\vec{V}$ varie. Il est donc évident qu'à partir d'un certain instant, $(\vec{P_0} + \vec{\pi})$ sera compensée par la force $\vec{f_v}$. Il s'en suivra donc, une accélération nulle et la bille sera animée d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $V_2(t)$=Cte. En remplaçant dans l'équation (3), $\frac{dV}{dt}$ par zéro, on déduit $V_2(t)$; soit:

$$V_2(t) = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} \tau g$$

La solution de l'équation (3) est, alors:

$$V(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} \tau g$$

La valeur de la constante d'intégration, A, s'obtient à partir des conditions aux limites du problème. Dans notre cas, V(t=0)=0 (m/s).

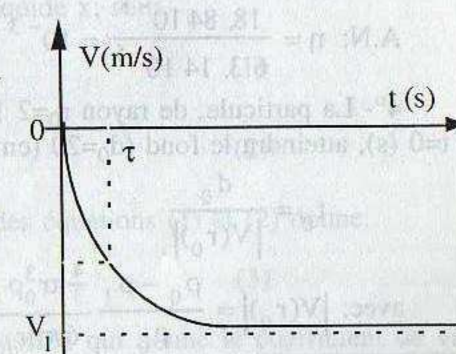
soit: $$0 = A + \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} \tau g$$

D'où: $$A = - \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} \tau g$$

La vitesse de la bille en fonction du temps s'écrit, alors:

$$V(t) = V_1 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

où: $$V_1 = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} \tau g$$



Quant à son allure, elle est donnée par la figure ci-contre.

A.N: $V_l = -2,22\,10^{-4}$ (m / s)

$\tau \approx 4,44\,10^{-5}$ (s)

$V(t) = -2,22\,10^{-4}(1 - e^{-22,52\,t})$

2°-Pour que $V(t_1)$ soit égale à 0,99 V_l , il faudrait que:

$$1 - e^{-22,52\,10^3 t_1} = 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0,99$$

soit: $e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 10^{-2} \Rightarrow t_1 \approx 4,6\tau$

c'est à dire: $t_1 \approx 4,44\,10^{-5}\ 4,6 \approx 0,2\,10^{-3}$ (s)

Au bout de 0,2 (ms), la boule atteindra donc sa vitesse limite au 1/100 près. Comme la vitesse de déplacement est très faible, on peut considérer le mouvement de la boule rectiligne et uniforme pour la longueur d_0= 20 (cm). En effet, le temps nécessaire à la boule pour parcourir d_0 sera:

$$t_2 = \frac{d_0}{|V_l|} = \frac{0,20}{2,22\,10^{-4}} \approx 901 \text{ (s)}$$

et $\frac{t_1}{t_2} \approx 2,2\,10^{-7}$ (s). On voit bien que t_1 est négligeable devant t_2

3°- On détermine le coefficient, η , à partir des deux expressions de la force $\vec{f_v}$.

$$\vec{f_v} = -6\pi\eta r\vec{V} = -C\vec{V}$$

D'où: $\eta = \frac{C}{6\pi r}$

A.N: $\eta = \frac{18,84\,10^{-8}}{6\ 3,14\,10^{-5}} = 10^{-3}$ Poiseuille (P)

4°- La particule, de rayon r_0=2 10^{-6} (m), qui est à la surface du liquide à t=0 (s), atteindra le fond (d_0=20 (cm)) à l'instant t_0 tel que:

$$t_0 = \frac{d_0}{|V(r_0)|}$$

avec: $|V(r_0)| = \frac{\rho_0 - \rho_l}{\rho_0}\frac{\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0}{6\pi\eta r_0}g$

c'est à dire: $|V(r_0)| = \frac{2}{9}\frac{\rho_0 - \rho_l}{\eta}g r_0^2$

Remarque: La vitesse de descente des particules dans le liquide est d'autant plus importante que leur rayon est grand. Donc, les particules de rayon supérieur à r_0 atteindront le fond avant la particule de rayon r_0

A l'instant t_0, il ne restera en suspension dans le liquide que des particules de rayon inférieur à r_0

$$t_0 = \frac{9 d_0 \eta}{2(\rho_0 - \rho_l)g}\frac{1}{r_0^2}$$

$$t_0 = \frac{9\ 0,2\ 10^{-3}}{2\ 10^{-3}\ 10}\frac{1}{4 10^{-12}} \approx 2,25\,10^4 \text{ (s)}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE N°2.8

Dans un récipient, contenant un liquide de masse volumique ρ et dont le coefficient de viscosité dynamique est η, la vitesse de sédimentation V_S d'une bille, de masse volumique ρ_0 et de rayon r_0, est telle que (Cf. Sol. Ex. n°2.7):

$$V_S = |V(r_0)| = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0}\frac{\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0}{6\pi\eta r_0}g = \frac{2}{9}\frac{(\rho_0 - \rho)g}{\eta}r_0^2$$

Si h_0 est la profondeur du liquide dans le récipient, le temps t que mettra la bille pour atteindre son fond est:

$$t = \frac{h_0}{V_S} = \frac{9}{2}\frac{\eta h_0}{(\rho_0 - \rho)g}\frac{1}{r_0^2}$$

On peut donc exprimer les temps t_1 et t_2 de sédimentation de la bille, respectivement, dans l'eau et dans le liquide x; soit:

$$t_1 = \frac{9}{2}\frac{\eta_e h_0}{(\rho_0 - \rho_e)g}\frac{1}{r_0^2} \quad (1)$$

et $$t_2 = \frac{9}{2}\frac{\eta_x h_0}{(\rho_0 - \rho_x)g}\frac{1}{r_0^2} \quad (2)$$

Le rapport, membre à membre, des équations (1) et (2) donne:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\eta_e}{\eta_x}\left(\frac{\rho_0 - \rho_x}{\rho_0 - \rho_e}\right) \quad (3)$$

De la relation (3), on tire l'expression qui donne le coefficient de viscosité dynamique η_x du liquide x, en fonction de celui de l'eau et des temps de sédimentation; soit:

$$\eta_x = \frac{t_2}{t_1}\left(\frac{\rho_0 - \rho_x}{\rho_0 - \rho_e}\right)\eta_e$$

D'ou l'expression et la valeur du coefficient de viscosité cinématique ν_x du liquide x.

$$\nu_x = \frac{\eta_x}{\rho_x} = \frac{t_2}{t_1}\left(\frac{\rho_0 - \rho_x}{\rho_0 - \rho_e}\right)\frac{\eta_e}{\rho_x}$$

A.N:

$$\nu_x = \frac{9\,(s)}{2\,(s)}\frac{(7,8 - 1,06)(g/cm^3)}{(7,8 - 1)(g/cm^3)})\frac{1,14\,10^{-3}\,(P_s)}{1,06\,10^3\,(kg/m^3)} \approx 4,8\,10^{-6}\,(m^2/s)$$

soit: $\nu_x \approx 4,8\,10^{-2}$ (St)

SOLUTION DE L'EXERCICE N°2.9

1°- Dans un viscosimètre à écoulement, le coefficient de viscosité cinématique ν, d'un liquide quelconque, s'exprime, en fonction du temps t d'écoulement d'un volume V_0 de ce liquide, comme suit (Cf. Cours):

$$\nu = a\,t$$

Comme on connaît le coefficient de viscosité cinématique ν_e de l'eau et le temps t_e que met un volume V_0 d'eau pour s'écouler dans ce viscosimètre, on peut donc déduire sa constante a; soit:

$$a = \frac{\nu_e}{t_e}$$

avec: $\nu_e = \dfrac{\eta_e}{\rho_e} = \dfrac{1,14\,10^{-3}\,(P)}{10^3\,(Kg/m^3)} \approx 1,14\,10^{-6}\,(m^2/s)$

D'où la valeur de la constante a du viscosimètre.

$$a = \frac{1,14\,10^{-6}\,(m^2/s)}{10\,(s)} \approx 1,14\,10^{-7}\,(m^2/s^2)$$

Remarque: dans le système CGS, la valeur de la constante de ce viscosimètre est égale à 1,14 10^{-3} (St) car, 1 (St)=10^{-4} (m^2/s).

2°- La connaissance de a et du temps d'écoulement t_x du volume V_0 du liquide x, dans ce viscosimètre, permet de déterminer son coefficient de viscosité cinématique ν_x ; soit:

$$\nu_x = 1,14\,10^{-7}\,(m^2/s^2)\,42\,(s) \approx 47,88\,10^{-7}\,(m^2/s^2)$$

ou: $\nu_x = 1,14\,10^{-3}\,(St/s)\,42\,(s) \approx 4,79\,10^{-2}\,(St)$

D'où le coefficient de viscosité dynamique η_x de ce liquide.

$$\eta_x = \nu_x\rho_x = \begin{cases} 47,88\,10^{-7}\,(m^2/s)\,1,06\,10^{+3}\,(Kg/m^3) \approx 5\,10^{-3}\,(P) \\ 4,79\,10^{-2}\,(St)\,1,06\,(g/cm^3) \approx 5\,10^{-2}\,(poises) \end{cases}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE N°2.10

Dans un viscosimètre à entraînement, le coefficient de viscosité dynamique η est relié à l'angle de rotation α du cylindre fixe par (Cf. Cours):

$$\eta = C\alpha$$

Le coefficient de viscosité dynamique η_e de l'eau peut se déduire de son coefficient de viscosité cinématique ν_e ; soit:

$$\nu_e = \frac{\eta_e}{\rho_e} \Rightarrow \eta_e = \nu_e\rho_e = 1,14\,10^{-2}\,(St)\,1\,(g/cm^3) \approx 1,14\,10^{-2}\,(poise)$$

Comme on connaît l'angle de rotation α_e subie par le cylindre mobile du viscosimètre, dans le cas de l'eau, on peut donc déterminer la valeur de la constante C; soit:

$$C = \frac{\eta_e}{\alpha_e} = \frac{1,14\,10^{-2}\,(poise)}{10\,(°)} = 1,14\,10^{-3}\,(poise/(°))$$

D'où la valeur du coefficient de viscosité dynamique η_s du sang frais.

$$\eta_s = C\,\alpha_s = 1,14\,10^{-3}\,(poise/(°))\,44\,(°) \approx 5\,10^{-2}\,(poise)$$

Remarque: la constante C' du viscosimètre dans le système MKSA n'est pas la même que sa constante C dans le système CGS. Comme 1 (Poiseuille)=10 (poises), la relation entre C et C' est: C'=10C. La relation fondamentale du viscosimètre à entraînement s'écrit donc:

$$\eta(poise) = C\alpha \quad \text{et} \quad \eta(Poiseuille) = C'\alpha$$

SOLUTION DE L'EXERCICE N°2.11

Remarque: comme les tronçons du pipe line et les pressions à leurs extrémités sont les mêmes, la nature de l'écoulement est la même dans chacun des tronçons du pipe line; il en est de même pour les pertes de charge.

1°- La nature de l'écoulement dans le pipe line est déterminée par la valeur de son nombre de Reynolds; on doit donc le calculer. Pour cela, calculons, d'abord, la vitesse moyenne de l'écoulement et le coefficient de viscosité cinématique du pétrole.

La vitesse moyenne V de l'écoulement se déduit du débit massique du pipe line; soit:

$$\dot{m} = \rho S V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\dot{m}}{\rho S}$$

c'est à dire:

$$V = \frac{\frac{10^6}{24\,(3600)}(\mathrm{Kg/s})}{0,85\,10^3\,(\mathrm{Kg/m^3})\,3,14\,(0,15)^2(\mathrm{m^2})} \approx 0,192\ (\mathrm{m/s})$$

La viscosité cinématique du pétrole est:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{0,1\,(\mathrm{Ps})}{0,85\,10^3\,(\mathrm{Kg/m^3})} \approx 117,64\,10^{-6}\,(\mathrm{m^2/s})$$

D'où la valeur du nombre de Reynolds de l'écoulement.

$$\Re_e = \frac{V}{\nu}d = \frac{0,192\ (\mathrm{m/s})}{117,64\,10^{-6}\,(\mathrm{m^2/s})}\,0,30\ (\mathrm{m}) \approx 489,63$$

Comme il est inférieur à 2300, l'écoulement dans le pipe line est laminaire.

2°- La longueur L des tronçons du pipe line est:

$$L = \frac{720\ (\mathrm{Km})}{6} = 120\ (\mathrm{Km}) = 1,2\,10^5\ (\mathrm{m})$$

Comme le régime d'écoulement est laminaire et que la longueur L= $1{,}2\,10^5$ (m) d'un tronçon de pipe line est très grande devant son rayon R=0,15 (m), on peut utiliser l'équation de Poiseuille pour déterminer la perte de charge, ΔP, dans le tronçon de pipe line (Cf. Cours); soit:

$$\dot{Q} = \frac{\pi\,\Delta P}{8\eta L}r^4 \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4}\dot{Q}$$

$$\Delta P = \frac{(8)\,(0,1\,\mathrm{Ps})\,(1,2\,10^5\ \mathrm{m})}{3,14\,(0,15\ \mathrm{m})^4}\,(0,192\ \mathrm{m/s})\,3,14\,(0,15\ \mathrm{m})^2$$

c'est à dire: $\Delta P \approx 8,192\,10^5$ (N

La pression maximale (P_{max}) dans la conduite est donc:

$$\Delta P = P_{max} - P_0 \quad \Rightarrow \quad P_{max} = \Delta P + P_0 \approx 9,192\,10^5\ (\mathrm{N/m^2})$$

Loi de conservation de masse

Ex. n°1.
1°: V_A=0,2 (m/s) et V_B=0,4 (m/s).
2°: Q=180 (litres)

Ex. n°2.
1°: V=4 (m/s)
2°: h=0,8 (m) et x=5,54 (m).

Ex. n°3.
1°: La balle se déplacera vers le haut avec une vitesse v=1 (cm/s).
2°- Débit volumique=314 (cm^3/s) et débit massique=282,6 (g/s).

Ex. n°4.
1°: s=20 (mm^2)
2°: L'action du jet sur le tuyau est verticale et est dirigée vers le bas. Quant à son intensité, elle est de 4,5 (N).

EQUATION DE BERNOULLI ET APPLICATIONS

Phénomène de Venturi

Ex. n°5.
1°: V_1=7,45 (cm/s) et V_2=12,90 (cm/s).
2°: Le débit massique est de 116,1 (g/s).

Ex. n°6: V_1=0,5 (m/s) et P_2=108717,5 (N/m^2).

Ex. n°7.
1°: P_A-P_B=1,5 10^3 (N/m^2).
2°: Δh=0,27 (m).

Ex. n°8 : Le débit est de 3 (l/mn). (l/mn).

Ecoulement à travers un orifice

Ex. n°9:
1°: V=2,45 (m/s).
2°: x=1,10 (m).
3°: H'=0,3 (m).

Ex. n°10:
1°: V=24,49 (m/s).
2°: Le débit est de 307,59 (cm^3/s).

3°: $P_T=3{,}81\ 10^5$ (N/m²) et $P_E=1{,}81\ 10^5$ (N/m²)

4°: $h_{max}=30$ (m), quand le jet est dirigé vers le haut et suivant la verticale.

Ex. n°11:

1°-: $\dot{Q} = s\sqrt{2gh}$

2°: Le temps nécessaire à la vidange complète est de 26,5 (mn).

Mesure de vitesses (Pitot)

Ex. n°12: V= 19,4 (cm/s).

Ex. n°13: V= 70,8 (cm/s).

Ex. n°14:

1°: Sur une ligne de courant, l'équation de Bernoulli est valable pour un fluide réel; on peut donc disposer les tubes de manière à ce qu'ils soient sur même ligne de courant et déterminer la vitesse locale de l'écoulement par: $V(y)=(2gh)^{1/2}$ (Cf. Cours)

2°: V(y)= 63,3 (cm/s)

FLUIDE RÉEL

Ex. n°15: Dès que le débit dépasse 12,35 (l/mn), le régime n'est plus laminaire.

Ex. n°16: $\Re_e \cong 1681$

1°-:

2°-: Le régime est laminaire.

1°-: Oui, $\Delta P=83{,}87$ (N/m²)

Ex. n°17:

1°-: le débit est de 942 (l/mn) environ.

2°-: le débit est de 122 (l/mn) environ.

3°-: f=146 (N).

Ex. n°18: $\Delta P=3{,}07855$ (N/m²)

Ex. n°19:

1°-: $h_2>4$ (m)

2°-: le débit est de 2,47 (l/mn) environ.

3°- $\Delta P=239{,}12$ (N/m²) et $h_2=402{,}39$ (cm).

Mesure du coefficient de viscosité - Viscosimètre

Ex. n°20:

1°-: A l'état initial: $\Delta P_i=400$ (N/m²) et à l'état final, $\Delta P_f=360$ (N/m²)

2°-: la viscosité dynamique du liquide est de 0,87 poise environ.

3°-: Oui, $r = 0{,}5\,(mm) << L = 200\,(mm) \Rightarrow$ régime laminaire et $\Delta(\Delta P) = 40\,(N/m^2) << \Rightarrow \Delta P \cong Cte = 380\,(N/m^2)$

Ex. n°21:

1°-: $a=1{,}14\ 10^{-7}$ (m²/s²)

2°-: $\eta_x=0{,}05$ poise

Ex. n°22: $\eta_s=0{,}05$ poise

Sédimentation - Vitesse de sédimentation

Ex. n°23:

1°-: $V_l = \frac{2}{9}\frac{r^2}{\eta} g\,(\rho' - \rho)$.

2°-: t=12,5 (mn).

Ex. n°24: $\nu_s=4{,}8\ 10^{-6}$ (m²/s) .

Résistance de l'air au mouvement d'un corps solide

Ex. n°25:

1°-: Suivant la verticale, la vitesse du parachutiste est de 7,53 (m/s) environ

2°: d'une hauteur de 2,83 (m) environ.

RAPPEL DE COURS

SOLUTION BINAIRE

Définition

On appelle **solution binaire**, un mélange homogène de deux corps différents. Le corps existant en grande proportion s'appelle **solvant** et l'autre le **soluté**.

Les solutions binaires peuvent être obtenues avec les trois états de la matière. Dans ce chapitre, on étudiera que les solutions liquides.

La désignation solvant soluté est arbitraire lorsque les deux corps sont miscibles en toute proportion.

Paramètres d'une solution binaire

Titre

Si m_0 est la masse du solvant et m celle du soluté, le titre t de la solution est défini par le rapport de la masse du soluté par celle de la solution; soit:

$$\boxed{t = \frac{m}{m_0 + m}}$$

Concentration

Lorsqu'une substance est mise en solution dans un solvant, la concentration de cette substance dans la solution peut s'exprimer de diverses façons:

- **Concentration pondérale**: c'est la masse du soluté par unité de volume de la solution; elle est en général exprimée en gramme par litre (g/l).

- **Molarité**: c'est le nombre de molécules gramme de soluté dissoutes dans un litre de solvant.

Le symbole utilisé pour désigner la molarité d'une solution est M et ses sous multiples. Le tableau ci-contre précise les définitions des symboles souvent utilisés dans la pratique.

Unité	Symbole	Définition
Mole	M	1(mole / l)
Millimole	mM	10^{-3}(mole / l)
Micromole	mM	10^{-6}(mole / l)
Nanomole	nM	10^{-9}(mole / l)
Picomole	pM	10^{-12}(mole / l)
Femtomole	fM	10^{-15}(mole / l)
Attomole	aM	10^{-18}(mole / l)

- **équivalent gramme ou équivalent:** dans une solution ionique, la connaissance de la charge électrique des ions qu'elle contient est capitale. Aussi, on défi-

nit une grandeur qui rend compte de la charge électrique de la solution, appelée **équivalent gramme** ou **équivalent** tout court, en abrégé (Eq), par le produit du poids atomique de l'ion (en atome gramme) par sa valence (Cf. Sol. Ex. n°3.2).

Exemples:

- une solution aqueuse de NaCl, de molarité 1M, contient 1 (Eq) de chlore et 1 (Eq) de sodium
- une solution aqueuse de $CaCl_2$, de molarité 1M, contient 2 (Eq) de chlore et 2 (Eq) de calcium.

- **Osmolarité**: c'est la grandeur qui rend compte du nombre total de particules du soluté dans un litre de solution; elle tient compte à la fois des ions et des molécules non dissociées. L'osmolarité s'exprime en **osmoles**. Elle est définit par le rapport du nombre total de particules du soluté, rapporté au litre de solution, par le nombre d'Avogadro.

Exemple: Une solution aqueuse de glucose, de molarité 1M, contient 1 (osmole/litre) alors qu'une solution aqueuse de NaCl de même molarité correspond à 2 (osmoles/litre). Dans le dernier cas, la dissociation est quasi totale. Donc, le nombre de particules de soluté dans la solution est multiplié par 2 (chaque molécule de NaCl se scinde en deux ions: Na^+ et Cl^-).

- **Molalité**: la molalité d'une solution est définie par le nombre de molécules gramme de soluté par kilogramme de solvant. Elle est utilisée pour les solutions très concentrées où le volume du soluté n'est plus négligeable devant celui du solvant.

- **Force ionique**: c'est l'unité de concentration des solutions électrolytes en activité. Elle fait intervenir à la fois la valence et la concentration des ions et permet d'exprimer globalement la concentration de la solution en particules chargées électriquement. La force ionique **I** d'une solution est définie par:

$$\boxed{I = \frac{1}{2}(c_1 v_1^2 + c_2 v_2^2)}$$

où: c_1, c_2, v_1 et v_2 représentent, respectivement, les concentrations des ions et leurs valences.

Exemple: une solution de sulfate d'ammonium $(NH_4)_2SO_4$, de molarité 2M, possède une force ionique de:

$$I = \frac{1}{2}\left[(4)(1^2) + (2)(2^2)\right] = 6$$

En effet, la solution 2M comporte 4 ions gramme NH_4^+ de valence 1 et 2 ions gramme de SO_4^{2-} de valence 2.

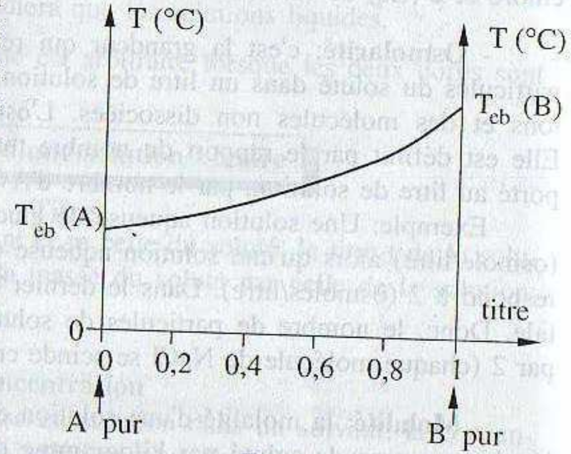
(Cf. Ex. n°3.1 et 3.2)

Melange de deux liquides

Mélange miscible en toutes proportions

Deux substances liquides en solution sont dites miscibles en toute proportion, si leur mélange est homogène quelque soit la quantité de chacune.
Exemples: (eau + alcool) , (huile +essence), ...etc...

La propriété principale de ces solutions est la variation de leurs températures d'ébullition en fonction de leurs titres. Dans le cas d'une solution S, composée des liquides A et B par exemple (S=A+B), la courbe donnant la variation de sa température d'ébullition T_{eb}, en fonction de son titre, a la forme de celle donnée par la Fig(1).



Fig(1)

Cette propriété trouve une application, pratique et importante, dans la séparation des liquides d'une solution, appelée distillation. En effet, en portant la solution S à une température T_0, légèrement inférieure à $T_{eb}(B)$, la solution s'appauvrit de plus en plus du liquide le plus volatil (A) et la vapeur obtenue est plus riche en (A) que B. La séparation de A et B n'est donc pas totale. En répétant plusieurs fois l'opération sur la vapeur, liquifiée au moyen d'un serpentin à eau, on arrive à séparer le liquide A de B avec un taux avoisinant les 100%; l'opération est alors appelée **distillation fractionnée.**

Mélanges incomplètement miscibles

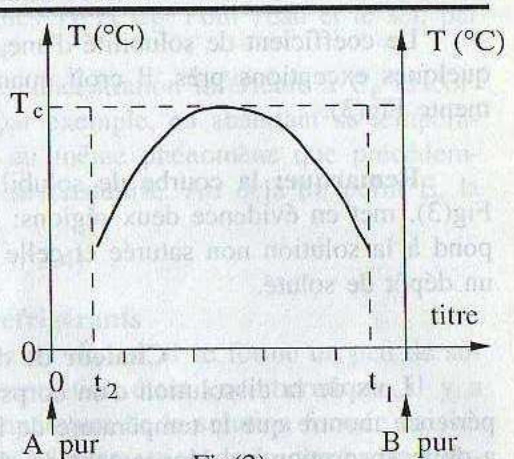
En solution, certaines substances liquides forment, selon la température de la solution qu'ils constituent, une phase homogène ou deux phases. De pareils liquides sont appelés liquides incomplètement miscibles.

Saturation - courbe de miscibilité

Considérons, à une température T(°C), le mélange incomplètement miscible eau-phénol. Si on ajoute progressivement de l'eau dans un récipient transparent et contenant du phénol, au début le mélange est homogène. Ensuite, on voit apparaître deux phases. A partir d'un certain titre t_1, l'eau ne

se dissout plus dans le phénol. En procédant à l'expérience inverse (c'est à dire verser du phénol dans l'eau), on s'aperçoit, également, qu'au début le phénol se dissout dans l'eau et ensuite il y a formation d'une autre phase. Donc, à partir d'un titre t_2, le phénol ne se dissout plus dans l'eau.

Les titres t_1 et t_2 sont appelés **titres de saturation** pour la température considérée.



Fig(2)

L'expérience montre que plus la température de la solution est élevée, plus les liquides en solution sont solubles l'un dans l'autre. A partir d'une certaine température T_c, appelée **température critique**, les deux liquides sont solubles l'un dans l'autre en toutes proportions. La courbe de la Fig(2) qui illustre ce phénomène est appelée **courbe de miscibilité** de la solution ou du mélange des liquides A et B.

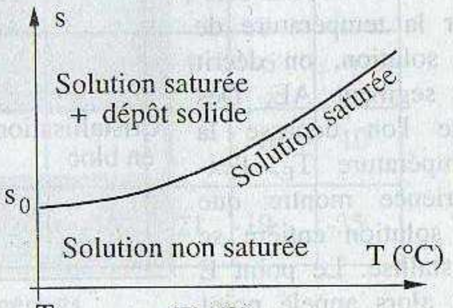
(Cf. Ex. n°3.3)

Solution d'un solide dans un liquide

Saturation - coefficient de solubilité

Saturation: considérons un solide A soluble dans un liquide B. Si on ajoute progressivement le solide A dans le liquide B, on s'aperçoit qu'au début A se dissout dans B. A partir d'une certaine quantité, donc d'un titre t ou d'une concentration C, A ne se dissout plus; on dit alors que la solution S=A+B est saturée.

Coefficient de solubilité: on appelle coefficient de solubilité de la solution S, la quantité maximale de A, exprimée en gramme, dissoute dans B et rapportée à 100 (g) de solvant.



Fig(3)

Exemple: à 20°C, 100 (g) d'eau peuvent dissoudre 204 (g) de sucre. Le coefficient de solubilité **s** de la solution est alors: s=204.

Le coefficient de solubilité d'une solution dépend de sa température. A quelques exceptions près, il croît quand la température de la solution augmente Fig(3).

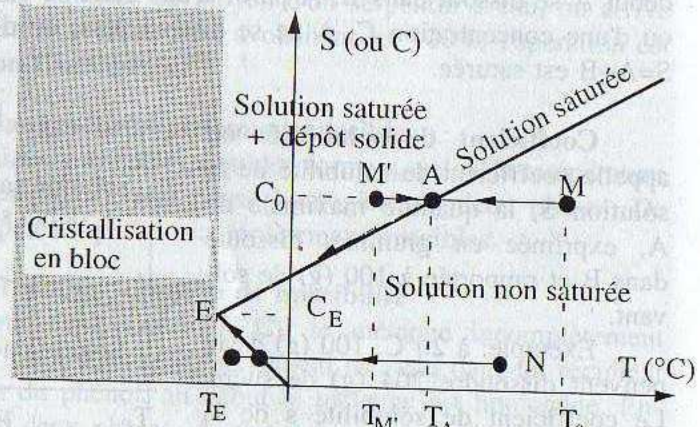
Remarque: la courbe de solubilité de la solution, représentée sur la Fig(3), met en évidence deux régions: celle au dessous de la courbe correspond à la solution non saturée et celle au dessus, à la solution saturée avec un dépôt de soluté.

Chaleur de dissociation

Lors de la dissolution d'un corps solide (A) dans un liquide (B), l'expérience montre que la température de la solution augmente ou diminue; il y a donc absorption ou dégagement de chaleur. On appelle **chaleur de dissociation** (ou chaleur latente de dissociation), la chaleur Q_0, dégagée ou absorbée par la solution, lors de la dissolution d'une masse de 1 (g) du solide (A) dans le liquide (B).

Cristallisation d'une solution par refroidissement

Sur la courbe de solubilité de la Fig(4), considérons la solution non saturée, correspondant au point M (c_0,T_0). En abaissant progressivement sa température, on décrit d'abord le segment MA (au point A la solution (c_0,T_A) devient saturée) puis le segment AM'. L'expérience montre qu'en M' il n'y a pas de dépôt de soluté. La solution $(c_0,T_{M'})$, correspondant au point M', est dite **sursaturée.** Un tel phénomène est aussi appelé **"phénomène de retard à la cristallisation"**; on y met fin en ajoutant dans la solution un petit cristal de soluté, l'excès de soluté se cristallise alors et la température de la solution remonte (grâce à la chaleur de dissociation) à $T=T_A$. Si on continue à baisser la température de la solution, on décrit le segment AE. Dès que l'on dépasse la température T_E, l'expérience montre que la solution entière se cristallise. Le point E est alors appelé point **d'Eutéxie** de la solu-



Fig(4)

tion; il est caractérisé par ses coordonnés T_E et C_E. Pour l'eau et le sel, par exemple, on a: T_E=-21 (°C) et C_E=33%.

Si on considère une solution, de concentration inférieure à C_E et correspondant au point N de la Fig(4), par exemple, en abaissant sa température de façon progressive, on assiste au même phénomène que précédemment. Cependant, c'est le solvant qui se cristallise. Au delà du point E, la solution entière se cristallise.

(Cf. Ex. n°3.4)

Mélanges réfrigérants

Si on mélange de la glace pilée avec du sel, il se forme un peu de solution au contact des cristaux. La dissociation étant endothermique, il y a alors absorption de la chaleur et la température de la solution formée baissera jusqu'à saturation; c'est à dire: jusqu'à l'intersection de la courbe de solubilité EA ou EO Fig(4), selon la concentration de la solution. Si la concentration est de 33%, par exemple, la température de la solution baissera jusqu'à -21 (°C). Un tel mélange peut donc être utilisé comme milieu réfrigérant.

Dans les laboratoires d'analyse, on utilise souvent des mélanges réfrigérants comme source de production de froid; ceux couramment utilisés sont résumés dans le tableau ci-dessous.

	Quantités respectives en poids				
Eau	4	1			
Chlorure de potassium	1				
Nitrate d'ammonium		1			
Chlorure de sodium			1		
Glace pilée			1	6	7
Chlorure de calcium hydraté (6 H_2O)				10	10
Température obtenue en (°C)	-12	-15	-21	-19	-35

Mélanges réfrigérants

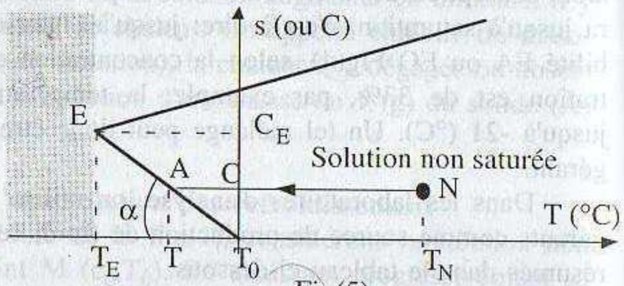
Dans les paragraphes sur la cryoscopie et l'ébullioscopie, les solutions considérées seront supposées très étendues; c'est à dire: de faibles concentration.

CRYOSCOPIE

Puisqu'on est dans le cas où $C<C_E$, la cryoscopie concerne donc l'abaissement des points de congélation des solvants (Fig(5)).

Lois de Raoult

Soit un liquide (A) dont le point de congélation est $T=T_0$ (°C), contenant une substance solide (B) dissoute dans (A). L'allure de la courbe de solubilité de La solution S=A+B est celle représentée sur la Fig(5).



Fig(5)

Considérons la solution $S(T_N,C)$. Si on abaisse sa température, d'après la Fig(5), il y aura apparition de cristaux du solvant (A) à la température T. Le point de congélation du solvant A (en solution) n'est donc plus T_0 mais T inférieure à T_0.

1°loi de Raoult: Comme le montre la Fig(5), **l'abaissement du point de congélation ($\Delta T=T_0-T=C\cot g(\alpha)$) du solvant est proportionnel à la concentration C de la solution.** On peut donc écrire:

$$\boxed{\Delta T = k_c C}$$

Raoult a étudié comment varie la constante de proportionnalité k_c d'un solvant quand on change de soluté. Il a observé que pour un même solvant la constante k_c est inversement proportionnel à la masse molaire M du soluté, exprimée en gramme; soit:

$$k_c = \frac{k'_c}{M}$$

où: k_c' est une constante qui ne dépend que du solvant et de sa température. Le tableau ci-dessous donne, à titre d'exemple, les valeurs de k'_c couramment utilisées en laboratoire.

Solvants	Eau	Benzène	CH_3CO_2H	CCl_4
Valeur de k'_c	1850	5000	3900	29800

Remarque: la valeur théorique de k_c', en accord avec l'expérience, est:

$$k'_c = \frac{R T_f^2}{L_f}$$

où: R, T_f et L_f désignent, respectivement, la constante des gaz parfaits relative à une mole, la température de fusion du solvant en degré Kelvin et sa chaleur latente de fusion (ou enthalpie massique).

2° loi de Raoult: en remplaçant k_c par son expression k'_c/M dans la 1°loi de Raoult, on obtient:

$$\boxed{\Delta T = k'_c \frac{C}{M}}$$

Comme le rapport C/M désigne le nombre de molécules grammes de soluté dissoutes par unité de volume du solvant, qu'on peut appeler concentration en molécules gramme ou **concentration molaire** de la solution, la 2° loi de Raoult s'énonce comme suit:

> **L'abaissement du point de congélation du solvant en solution étendue, par rapport à celui du solvant pur, est proportionnel à la concentration molaire du soluté.**

Remarque: le rapport C/M exprime aussi la concentration de la solution en corpuscules de soluté dissout; soit:

$$\frac{C}{M} = \left(\frac{m}{M}\right) / l = (n N_A) / l$$

où: m, M et n désignent, respectivement, la masse de soluté dissoute, la masse molaire et le nombre de moles du soluté. Quant à N_A et l, ils désignent le nombre d'Avogadro et le volume de la solution (litre).

Cas des solutions électrolytes

L'expérience montre que les lois précédentes de Raoult ne sont pas valables pour les solutions qui conduisent l'électricité, appelées **électrolytes.** La raison est l'ionisation totale ou partielle des molécules du soluté en solution. En effet, le nombre de corpuscules dans l'électrolyte est supérieur au nombre de molécules de soluté dissout. La concentration en corpuscules dans un électrolyte s'écrit comme suit:

$$i (n N_A) / l = i \frac{C}{M}$$

i étant le coefficient d'ionisation du soluté (i >1).

En remplaçant, dans l'expression de la deuxième loi de Raoult, la concentration molaire du soluté par sa concentration en corpuscules, les résultats obtenus concordent avec l'expérience. D'où la loi de Raoult pour les solutions électrolytes:

$$\boxed{\Delta T = i\, k'_c \frac{C}{M}} \qquad \text{(Cf. Ex. n°3.5)}$$

EBULLIOSCOPIE

L'expérience montre que le point d'ébullition d'un solvant en solution est plus élevé que son point d'ébullition quand il est pur. Raoult a établi, dans le cas des solutions étendues, des lois analogues à celles de la cryoscopie; soit:

1° loi de Raoult: L'élévation ΔT du point d'ébullition d'un solvant en solution, par rapport à celui T_e^0 du solvant pur, est proportionnel à la concentration C de la solution.

$$\boxed{\Delta T = T_e - T_e^0 = k_e C}$$

2°-Loi de Raoult: L'élévation ΔT du point d'ébullition d'un solvant en solution, par rapport à celui du solvant pur, est proportionnel à la concentration molaire du soluté.

$$\boxed{\Delta T = k_e \frac{C}{M}}$$

Pour les solutions électrolytes, la loi de Raoult s'écrit:

$$\boxed{\Delta T = i\, k'_e \frac{C}{M}}$$

La valeur théorique de k'_c est:

$$k_e = \frac{R T_e^2}{L_v}$$

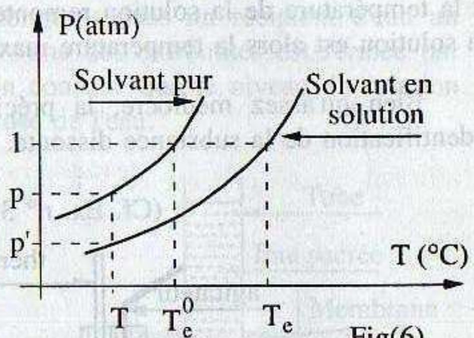
où: R,T_e et L_v, désignent, respectivement, la constante des gaz parfaits relative à une mole, la température d'ébullition du solvant en degré Kelvin et sa chaleur latente de vaporisation.

Le tableau ci dessous donne, à titre d'exemple, les valeurs de k_e' couramment utilisées en laboratoire.

Solvants	Eau	Benzène	CH_3CO_2H	CCl_4
Valeur de k'_e	520	2550	1170	4850

TONOMETRIE

Considérons une enceinte renfermant un gaz G à la température T et à une pression P. Si le gaz G est formé de la vapeur de solvant pur, la pression de vapeur, souvent **appelée tension de vapeur,** sera égale à P. Si le gaz G est formé de la vapeur de la solution (c'est à dire de la vapeur du solvant et de celle du soluté), la pression P sera égale à la somme des tensions de vapeur du solvant et du soluté. Il est donc évident que pour une température T donnée la tension de vapeur du solvant pur est toujours supérieure à celle du solvant en solution. Pour illustrer le commentaire, on a représenté sur la Fig(6) les allures des courbes de variations des tensions de vapeur du solvant pur et en solution, en fonction de la température.



Fig(6)

L'abaissement relatif de la tension de vapeur du solvant en solution, par rapport à celle du solvant pur et à une température T donnée, est exprimé par la loi de Raoult ci-après:

$$\boxed{\frac{p - p'}{p} = k_t \frac{C}{M}}$$

où: k_t, C et M désignent, respectivement, une constante qui est égale à la masse molaire du solvant, la concentration de la solution et la masse molaire du soluté.

APPLICATION DES LOIS DE RAOULT

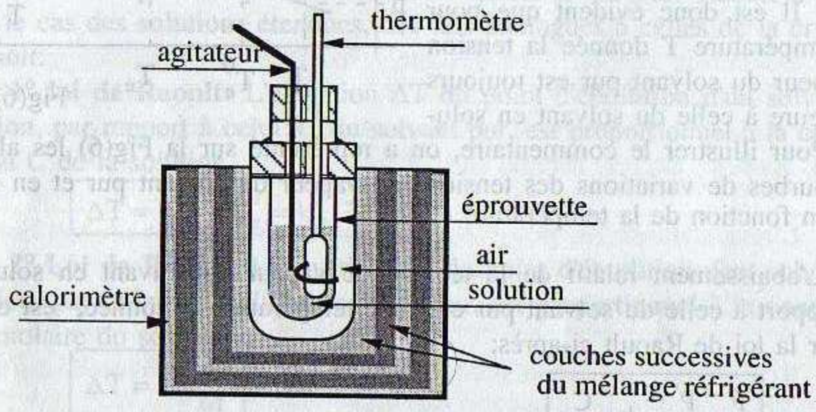
Les lois de Raoult (cryoscopie, ébullioscopie et tonométrie), sont, en général, utilisées pour la détermination expérimentale, donc approchée, des masses molaires des substances à l'état dissous, par la mesure des effets cryométrique (abaissement du point de congélation du solvant), ébulliométrique (élévation du point d'ébullition du solvant) et tonométrique (abaissement relatif de la tension de vapeur du solvant).

La cryométrie, facile à mettre en oeuvre, est la plus utilisée dans la pratique. Avec un appareillage rudimentaire Fig(7); on détermine l'abaissement du point de congélation du solvant en solution puis la masse molaire du soluté au moyen de la loi de Raoult.

Remarque: lors de la manipulation, on observe souvent le phénomène de retard à la cristallisation. Pour y mettre fin, il faut ajouter dans la solution un fragment de cristal du solvant; l'excès de solvant se cristallise alors et la température de la solution remonte. Le point de congélation du solvant en solution est alors la température maximale relevée sur le thermomètre.

Bien qu'assez médiocre, la précision est néanmoins suffisante pour l'identification de la substance dissoute.

(Cf. Ex. n° 3.6)



Fig(7)

L'ébulliométrie est très peu utilisée. Quant à la tonométrie, elle n'est guère utilisée.

DIFFUSION A TRAVERS UNE MEMBRANE

L'osmose

L'osmose est le phénomène d'échange de matière, à travers une membrane, entre deux solutions.

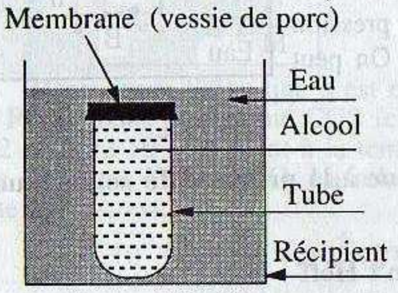
Les expériences classiques d'osmose sont celles menées par l'Abbé Nollet et Dutrochet.

Expérience de l'Abbé Nollet: En plongeant dans un récipient plein d'eau un tube, contenant de l'alcool et fermé au moyen d'une vessie de porc Fig(8), au bout de quelques heures, la vessie gonfle et on constate qu'il y a

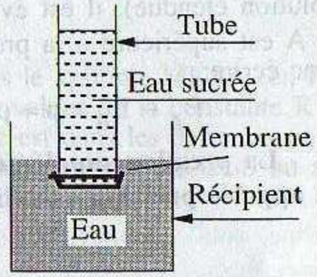
de l'eau à l'intérieur du tube et de l'alcool dans le récipient. On dit qu'il y a **endosmose** de l'eau et **exosmose** de l'alcool; la première étant plus rapide que la seconde.

Le phénomène dépend de la nature de la membrane.

Expérience de Dutrochet: En plongeant dans un récipient d'eau un tube, contenant de l'eau sucrée et dont l'une des extrémités est fermée par une membrane en caoutchouc Fig(9), on constate que le niveau de solution dans le tube monte. il y a donc **endosmose** de l'eau.



Fig(8)



Fig(9)

Dialyse

Dans l'expérience de l'Abbé Nollet, l'endosmose de l'eau est plus rapide que l'exosmose de l'alcool. Comme la molécule d'eau est plus petite que celle d'un alcool, on peut conclure que les petites molécules diffusent plus rapidement à travers les orifices des membranes que les grosses. Cette propriété importante, appelée dialyse, est utilisée dans la pratique pour séparer les grosses molécules telles que les gommes, la gélatine, l'albumine etc... des petites molécules, capables de cristallisés, telles que les sels, appelés cristalloïdes.

Paroi semi-perméable

Une paroi semi-perméable est une membrane qui ne se laisse traversée que par l'eau.

Une pareille membrane n'existe pas. Cependant, on a réalisé, dans la pratique, une paroi qui l'approche, appelée cellule de Pleffer.

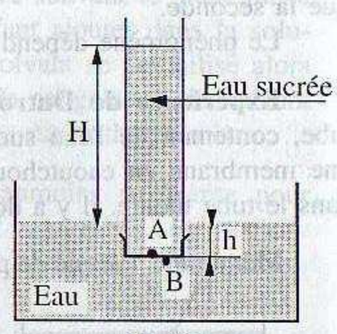
Pression osmotique

Si on reprend l'expérience de Dutrochet avec une paroi semi-perméable, on s'aperçoit que le niveau de solution peut monter très haut dans le tube.

A l'équilibre les pressions hydrostatiques, de part et d'autre de la membrane Fig(9), valent:

$$P_A = \rho_s g (H + h) + P_0$$

et $$P_B = \rho_e g h + P_0$$



Fig(9)

L'épaisseur de la membrane est supposée négligeable et P_0 est la pression atmosphérique.

Comme la masse volumique ρ_s de la solution est sensiblement égale à celle ρ_e de l'eau (solution étendue), il est évident que la pression en A est supérieure à la pression en B. On peut donc écrire:

$$P_A - P_B = p \approx \rho_e g H$$

La pression supplémentaire p , due à la présence du soluté (sucre), est appelée pression osmotique.

Loi de Van't Hoff

Pour interpréter physiquement la pression osmotique, Van't Hoff a fait l'analogie entre un gaz parfait et une solution binaire: les corpuscules du soluté dissout sont assimilés aux points matériels du gaz parfait et le volume du solvant au volume occupé par le gaz parfait. Ainsi, l'endosmose de l'eau s'explique par la propriété d'expansion des gaz; à savoir qu'un gaz a toujours tendance à augmenter le volume qui lui est offert. Il en est donc de même pour les corpuscules du soluté en solution. L'augmentation de volume du solvant se traduit par son endosmose.

Comme la pression P d'un gaz parfait de n moles, à la température T et occupant un volume V, est donnée par l'équation d'état suivante:

$$P V = n R T \qquad \text{(R étant la constante des gaz parfaits)}$$

par analogie, la pression osmotique p d'une solution de concentration pondérale C et à la température T, s'écrit:

$$p V_{solvant} = n_{solute} R T$$

Le nombre de moles du soluté ($n_{soluté}$) s'exprime, en fonction de la concentration C de la solution, de la masse volumiques ρ_s du solvant et de la masse molaire M du soluté, comme suit:

$$n_{solute} = \frac{m_{solute}}{M} = \left(\frac{m_{solute}}{m_{solvant}}\right)\left(\frac{m_{solvant}}{M}\right) = C \frac{\rho_s V_{solvant}}{M}$$

En remplaçant $n_{soluté}$ par sa valeur dans l'équation d'état des gaz parfait, on obtient la loi dite de Van't Hoff; soit:

$$p V_{solvant} = C \frac{\rho_s V_{solvant}}{M} R T$$

c'est à dire:

$$\boxed{p = \rho_s R T \frac{C}{M}}$$

Dans le cas des solutions électrolytes, le nombre de fragments de soluté dans la solution est égal à (i $n_{soluté}$), i étant le coefficient d'ionisation du soluté, la loi de Van't Hoff s'écrit:

$$\boxed{p = i \rho_s R T \frac{C}{M}}$$

Remarque: Selon que p est exprimée dans le système MKSA (en Pascal P) ou dans le système CGS (en baryes), la valeur de la constante R est 8,32 ou $8{,}32\ 10^{+7}$. Quant à la température, elle est dans les deux cas exprimée en degré Kelvin (°K). La relation de passage du système CGS au système MKSA est:

$$10^6 \text{ (baryes)} = 10^5 \text{ (P)} \approx 1 \text{ (atm)}$$

(Cf. Ex. n°3.7)

Enfin, comme les lois de la cryométrie, de l'ébulliométrie et de la tonométrie, la loi de Van't Hoff est également une loi approchée. Cependant, les résultats qu'elle donne, pour les solutions étendues, sont assez satisfaisants.

La pression osmotique p d'une solution peut être reliée à l'abaissement ΔT de son point de congélation. En effet, en tirant l'expression de C/M de la 2° loi de Raoult pour la cryoscopie:

$$\Delta T = i k'_c \frac{C}{M} \Rightarrow \frac{C}{M} = \frac{\Delta T}{i k'_c}$$

et en remplaçant dans la loi de Van't Hoff le rapport C/M par son expression, on obtient relation en question:

$$p = i \rho_s R T \left(\frac{\Delta T}{i k'_c}\right)$$

soit: $$\boxed{p = \frac{\rho_s R T}{k'_c} \Delta T}$$

Remarque: De la même manière que précédemment on peut aussi relier la pression osmotique p d'une solution à l'élévation de son point d'ébullition ΔT_{eb} et à la diminution relative de sa tension de vapeur (tonométrie).

TONICITE DES SOLUTIONS

Considérons deux solutions S_1 et S_2., ayant un même solvant et des pressions osmotiques p_1 et p_2.

Si $p_1=p_2$, les solutions sont dites **isotoniques.** En les mettant en présence, l'une de l'autre et séparée par une paroi semi perméable, il n'y aura pas d'échange de matière entre elles.

Si $p_1>p_2$, les solutions S_1 et S_2 sont dites, respectivement, **hypertonique** et **hypotonique**. En les mettant en présence, l'une de l'autre et séparée par une membrane, l'expérience montre qu'il y a endosmose du solvant dans S_1; le phénomène s'arrête quant les pressions osmotiques de S_1 et S_2 deviennent égales.

Remarques:

1- Si les solutions S_1 et S_2 sont de même nature (même solvant et même soluté), leurs pressions osmotiques sont proportionnelles à leurs concentrations. Dans ce cas, les solutions isotoniques sont des solutions de même concentration et les solutions hypertoniques et hypotoniques sont des solutions dont les concentrations sont, relativement, forte et faible. Quant on met ces dernières en présence, l'une de l'autre et séparées par une membrane, le solvant passe de la solution dont la concentration est plus faible vers celle où la concentration est relativement élevée; c'est à dire dans le sens qui tend à égaliser les concentrations.

2- Dans les cellules vivantes, le protoplasme semble être une paroi semi perméable, placée entre les vacuoles et le liquide ambiant. Si ce dernier est hypotonique, par rapport à celui des vacuoles, l'eau passe par osmose à l'intérieur de la cellule; il y a alors turgescence et même éclatement de la cellule. Si le liquide ambiant est hypertonique, la cellule se vide de son eau et se rétracte (plasmolyse). Donc, pour que les cellules vivantes ne subissent aucun dommage, il faut qu'elles baignent dans un liquide qui leur soit isotonique. Pour les globules rouges, par exemple, le liquide ambiant dans lequel elles baignent (plasma sanguin) doit contenir, environ, 9 (g) de NaCl par litre d'eau.

DIFFUSION MOLECULAIRE - LOI DE FICK

Mise en évidence

Diffusion en phase gazeuze: si on verse un peu de parfum dans un coin d'une grande salle fermée, après quelques minutes, toute la salle sentira du parfum. Donc, les molécules de parfum se sont diffusées dans la masse

d'air contenue dans la salle.

Diffusion en phase liquide: si on plonge un morceau de sucre dans un verre plein d'eau, au bout de quelques heures et sans agiter, l'eau contenue dans le verre sera sucrée. Comme dans l'exemple précédant, il y a eu également diffusion des molécules de sucre dans toute l'eau du verre.

Loi de la diffusion moléculaire

Le phénomène de diffusion moléculaire n'existe que lorsque la distribution des molécules du soluté (ou fragments de soluté) n'est pas homogène dans la solution considérée (parfum-air ou sucre-eau, dans les exemples ci-dessus). Il intervient donc pour uniformiser la distribution des molécules du soluté dans le solvant; c'est à dire: uniformiser la concentration locale de la solution. D'où la loi de diffusion moléculaire:

Dans une solution, le courant de diffusion moléculaire du soluté (ou de fragments de soluté) s'effectue toujours dans la direction des concentrations locales décroissantes.

Loi de Fick - Coefficient de diffusion

La loi de Fick exprime le débit $\mathbf{J_n}$ des molécules (ou des fragments) du soluté dans une solution, hors d'équilibre et dans une direction donnée.

Si n=n(M,t) est le nombre de molécules (ou fragments) de soluté, au point M de la solution et à l'instant t, la loi de Fick, dans la direction Ox d'un repère Oxyz et à l'instant t, s'écrit:

$$\boxed{(J_n)_x = -D\frac{\partial n}{\partial x}}$$

D est un coefficient de proportionnalité et $(J_n)_x$, le débit des molécules (ou de fragments) du soluté, au point M et dans la direction Ox.

Remarque: comme n est relié à la concentration locale C de la solution par: $C = n\dfrac{M}{N_A}$

où M et N_A sont, respectivement, la masse molaire du soluté et le nombre d'Avogadro, la loi de Fick, exprimant le débit massique du soluté ($\mathring{m}_s$) dans la direction Ox et à l'instant t, s'écrit aussi comme suit:

$$\boxed{(\mathring{m}_s)_x = -D\frac{\partial C}{\partial x}} \quad , \quad (\mathring{m}_s)_x = (J_n)_x\frac{M}{N_A}$$

Coefficient de diffusion

A l'exception des solutions très concentrées (ou les interactions à très courtes distances entre les molécules du soluté peuvent jouer un rôle important) et celles très diluées (ou la moyenne statistique perd son sens), le coefficient D de la loi de Fick est, en général, indépendant de la concentration de la solution. Cependant, il dépend, comme tout les phénomènes moléculaires, de la température de la solution. **D** est appelé **coefficient de diffusion** ou **diffusivité** du soluté. Il est toujours positif et s'exprime en mètre carré par seconde (m^2/s) dans le système MKSA; dans les tableaux, il est souvent donnée en (cm^2/s).

Le tableau, ci après, donne à titre d'exemple les valeurs du coefficient de diffusion moléculaire D de certaines solutions liquides, dans les conditions standarts.

Solutions	NaCl - H_2O	Sucre - H_2O	H_2O^{18} H_2O^{16}
Température (°C)	25	25	25
Valeur de D (cm^2/s)	$1{,}9\ 10^{-5}$	$0{,}52\ 10^{-5}$	$3{,}0\ 10^{-5}$

Equation de diffusion

En exprimant la variation du nombre de molécules (ou de fragments) du soluté, dans un volume élémentaire de solution et dans la direction Ox (Cf. Ex. n°3.8), on obtient l'équation de diffusion suivante:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial (J_n)_x}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial (\overset{\circ}{m}_s)_x}{\partial x}$$

Dans le cas où D est constant, en dérivant la loi de Fick, par rapport à x et en la remplaçant par son expression dans l'équation ci-dessus, on obtient:

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} = +D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}}$$

En régime stationnaire ($\frac{\partial C}{\partial t} = 0$), la solution de l'équation de diffusion est (Cf. Ex. n°3.8):

$$C(x) = -\frac{(\overset{\circ}{m}_s)_x}{D}x + C(x=0)$$

Applications

Calcul du débit massique d'un soluté à travers un tube.

Considérons un tube de longueur L, de section S, contenant une solution au repos et où diffusent, dans le sens de la longueur Ox, les molécules

du soluté en régime permanent. Le débit massique $(\overset{\circ}{m}_s)_x$ du courant de diffusion et la masse totale $(\phi_{ms})_x$ du soluté qui traverse le tube par seconde sont, d'après ce qui précède:

$$(\overset{\circ}{m}_s)_x = \frac{D}{L}(C(x=0) - C(x=L)) = \frac{D}{L}(C_0 - C_L)$$

et $$\boxed{(\phi_{ms})_x = (\overset{\circ}{m}_s)S = D\frac{S}{L}(C_0 - C_L)}$$

C_0 et C_L sont, respectivement, les concentration de la solution à l'entrée (x=0) et à la sortie (x=L) du tube.

Remarque: ce qu'on a fait dans la direction Ox est valable dans les autres directions, Oy et Oz notamment. Aussi, la loi de Fick généralisée s'écrit:

$$\boxed{\overrightarrow{\overset{\circ}{m}_s} = -D\,\overrightarrow{\nabla}(C)}$$

EXERCICE N°3.1

Un volume de 5 (ml) d'eau contient 5 (µmoles) de sucre (saccharose: $C_{12}H_{22}O_{11}$). Pour cette solution de sucre, déterminer:

1°- son titre.

2°- ses concentrations pondérale et molaire.

3°- sa molalité

La masse volumique de l'eau est ρ_e=1 (g/cm^3).

EXERCICE N°3.2

Dans une fiole, contenant 500 (cm^3) d'eau, on fait dissoudre 13,21(g) de sulfate d'ammonium $(NH_4)_2SO_4$. La dissociation de $(NH_4)_2SO_4$ en solution est supposée totale.

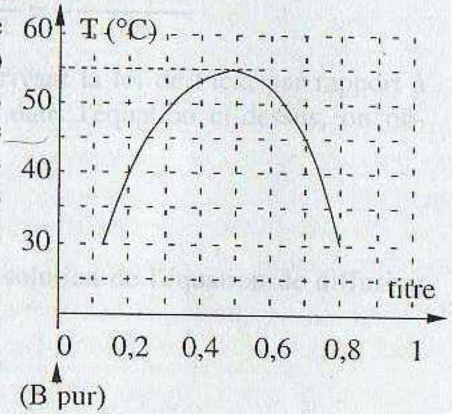
1°- Déterminer sa concentration en équivalents.

2°- Calculer sa force ionique

3°- Quelles seraient les concentrations pondérale, molaire en osmoles et en équivalents, d'une solution aqueuse de NaCl qui aurait la même force ionique que la solution précédente.

EXERCICE N°3.3

Une solution binaire est réalisée avec 0,5 (Kg) d'un liquide (A) et 2(Kg) d'un autre liquide (B). Un thermomètre, plongé dans ce mélange, indique une température de 40 (°C). La masse volumique du liquide (B) est de 0,9 (g/cm^3) et la courbe de miscibilité des liquides (A) et (B) est représentée ci contre.



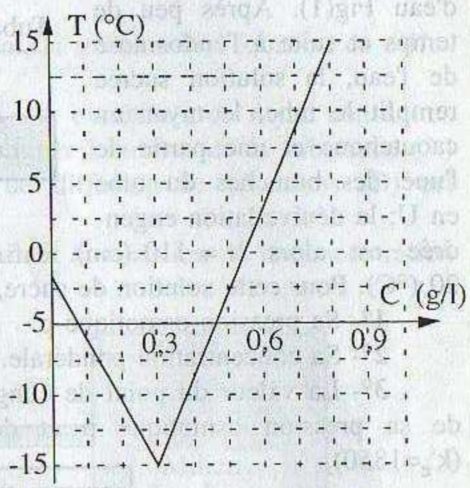
1°- Déterminer le titre et la concentration pondérale de la solution.

2°- La solution préparée est-elle homogène? pourquoi?

3°- Décrire qualitativement l'état du mélange précédent quant sa température passe de 40 (°C) à 30 (°C), de 40 (°C) à 45 (°C) et de 40 (°C) à 55 (°C). Que doit-on faire, dans chacun des cas précédents et aux températures indiquées, pour avoir un mélange homogène?

EXERCICE N°3.4

La courbe de solubilité d'un corps solide (A) dans un liquide (B) est représentée ci-contre.



1°- Quelle est la température de congélation du solvant pur?

2°- quels seraient les points de congélation du solvant pur dans une solution (S=A+B) de concentrations pondérale 0,01 (g/l) et 0,02 (g/l)?

3°- Que doit-on faire pour maintenir solution de 0,6 (g/l), de (A) et de (B), homogène?

4°- Que deviendra la solution de 0,6 (g/l) précédente, quand sa température passe à -2 (°C), à -10 (°C) et à -16 (°C); on supposera qu'il n'y a pas de phénomène de sursaturation.

5°- Qu'appelle-on point d'eutéxie de la solution? Donner ses coordonnés.

EXERCICE N°3.5

On considère deux solutions binaires, étendues et de même concentration pondérale C=0,1 (g/l). La première est une solution de sucre (eau+saccharose) et la seconde une solution de sel (eau+NaCl). Dans cette dernière, la dissociation de NaCl est supposée totale. La formule chimique du saccharose et la masse volumique de l'eau sont: $C_{12}H_{22}O_{11}$ et ρ_e=1 (g/cm^3).

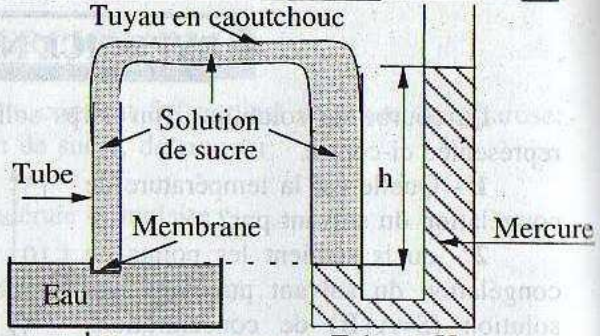
1°- Déterminer les titres et les concentrations molaires de ces solutions.

2°- Quelle est l'osmolarité et la force ionique de la solution de sel?

3°- déterminer les points de congélation de l'eau dans chacune de ces solutions, sachant que la constante cryoscopique "K'_c" de l'eau vaut 1850.

EXERCICE N°3.6

A l'intérieur d'un tube, fermé sur l'une de ses extrémités par une membrane semi perméable, on verse un peu de solution aqueuse de sucre (saccharose $C_{12}H_{22}O_{11}$). Ensuite, on relie, au moyen d'un tuyau en caoutchouc, l'autre extrémité à un tube en U, contenant initialement du mercure, puis on plonge l'autre extrémité dans un bac d'eau Fig(1). Après peu de temps et suite à l'endosmose de l'eau, la solution sucrée remplit le tube, le tuyau en caoutchouc et une partie de l'une des branches du tube en U; la dénivellation engendrée est alors h = 110 (cm). Enfin, la température de la solution est de 20 (°C). Pour cette solution de sucre, déterminer:



Fig(1)

1°- Sa pression osmotique p.

2°- Sa concentration pondérale.

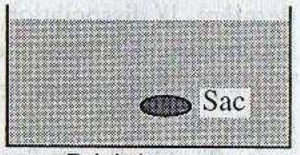
3°- La valeur du point de congélation du solvant en solution., à partir de sa pression osmotique p et de la constante cryoscopique de l'eau (k'_e=1850).

EXERCICE N°3.7

Une solution de sel (eau+NaCl), de concentration 2,8 (mM) et à la température 37 (°C), est renfermée dans un petit sac en tissu semi perméable et élastique.

1°- Déterminer la pression osmotique de cette solution.

2°- Le sac précédent est introduit à l'intérieur d'un grand récipient, contenant une autre solution de sel, de température de 37 (°C) et de pression osmotique $7{,}22 10^{-2}$ (atm).



Récipient

2.1- calculer la concentration pondérale de la solution du récipient.

2.2- Décrire le phénomène physique qui se produira dans le petit sac?

2.3- En supposant le volume maximum du sac négligeable devant celui de la solution du récipient, à l'équilibre, déterminer les concentrations de chacune des solutions.

EXERCICE N°3.8

Un long tuyau de section S=0,5 (cm2) et de longueur L=80 (cm) est rempli d'une substance liquide (B) au repos. L'une de ses extrémité es en contact permanent avec un milieu liquide de grand volume, constitué d'une

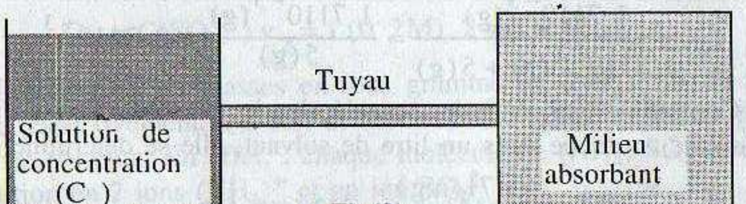
solution des substances (A) et (B) et de concentration pondérale C_0=1 (g/l), (B) étant le solvant. L'autre extrémité est en contact avec un milieu absorbant la substance (A) Fig(2).

1°- Etablir l'équation de diffusion de la substance (A) à travers le tuyau.

2°- déterminer, en régime permanent, la solution de l'équation de diffusion précédente.

3°- En supposant les concentration aux extrémités du tuyau constantes et égales à C_0=1 (g/l) et 0,1 (g/l), déterminer la masse de la substance (A) absorbée par seconde. Le coefficient de diffusion de (A) dans (B) est D=0,52 10^{-5}(cm^2/s).

4°- Tracer l'allure de la courbe donnant la variation de la concentration pondérale de la solution dans le tuyau.



Fig(2)

SOLUTION DE L'EXERCICE N°3.1

1°- Le titre de la solution est tel que:

$$t = \frac{m_{solute}}{m_{solute} + m_{solvant}}$$

avec:

$$m_{solute} = 5\,10^{-6} M = 5\,10^{-6}(12.\,12\,(g) + 22.\,1\,(g) + 11.\,16\,(g) = 1,\,71\,10^{-3}\,(g)$$

$$\text{et} \quad m_{solvant} = \rho_{solvant}\, V_{solvant} = 1\,(g\,/\,cm^3)\,5\,(cm^3) = 5\,(g)$$

D'où le titre de la solution.

$$t = \frac{1,\,71\,10^{-3}\,(g)}{1,\,71\,10^{-3}\,(g) + 5\,(g)} \approx \frac{1,\,71\,10^{-3}\,(g)}{5\,(g)} = 0,\,34\,10^{-3}$$

2°- Comme la concentration pondérale de la solution est égale la masse de soluté contenue dans un litre de solvant, elle se détermine comme suit:

$$C = \frac{m_{solute}}{V_{solvant}} = \frac{1,\,71\,(mg)}{5\,10^{-3}\,(l)} \approx 342\,(mg\,/\,l)$$

La concentration molaire étant égale au nombre de moles du soluté contenu dans un litre de solvant, sa valeur est:

$$C = \frac{(N^{bre}\text{ de mole})_{solute}}{V_{solvant}} = \frac{5\,(10^{-6} M)}{5\,10^{-3}\,(l)} = 1\,(mM\,/\,l)$$

3°- La molalité de la solution est égale au nombre de molécules gramme de soluté contenu dans un kilogramme de solvant. sa valeur est donc:

$$C = \frac{m_{solute}}{M}\frac{1}{m_{solvant}} = \frac{5\,(10^{-6} M)}{M}\frac{1}{5\,10^{-3}\,(Kg)} = 1\,(mM\,/\,Kg)$$

Dans notre cas, la masse d'un litre de solvant est de 1 (Kg).

SOLUTION DE L'EXERCICE N°3.2

1°- Pour déterminer la concentration de la solution en équivalents, il faudrait d'abord commencer par déterminer sa concentration en mole par litre; soit:

$$C = \frac{m_{solute}}{M_s}\frac{1}{V_{solvant}} = \frac{13,\,21\,(g)}{132,\,1\,(g)}\frac{1}{0,\,5\,(l)} = 0,\,2\,(M\,/\,l) = 0,\,2\,(M)$$

où: M_s=(14+4)2+32,1+4.16=132,1 (g) est la masse molaire du soluté

Comme la concentration en équivalents est égale au produit de la masse du soluté en ion gramme par sa valence et que les valences $(NH_4)^+$ et de SO_4^{2-} sont respectivement de 1 et de 2, les concentrations en équivalents des ions $(NH_4)^+$ et SO_4^{2-} sont:

pour l'ion $(NH_4)^+$:

$$C_1 = C(NH_4)^+\, v_1 = 2\,(0,\,2M).1 = 0,\,4\,(Eq)$$

pour l'ion SO_4^{2-} :

$$C_2 = C(SO_4^{2-})\, v_2 = 1\,(0,\,2M).\,2 = 0,4\,(Eq)$$

Remarque: les masses en ions gramme de $(NH_4)^+$ et de SO_4^{2-} sont égales, respectivement, à 2 fois et à une fois la masse en atome gramme du soluté en solution. En effet, , chaque molécule de $(NH_4)_2SO_4$ se dissocie en en solution en 2 ions $(NH_4)^+$ et un ion SO_4^{2-} .

$$(NH_4)_2SO_4 \rightarrow 2(NH_4)^+ + SO_4^{2-}.$$

2°- La force ionique I de la solution est:

$$I = \frac{1}{2}(C_1 v_1^2 + C_2 v_2^2)$$

$$\text{soit:} \quad I = \frac{1}{2}\left[(0,\,4)(1)^2 + (0,\,2)(2)^2\right] = 0,\,6$$

3°- En solution, le NaCl se dissocie en Na^+ et Cl^-. Donc, les valences v'_1 et v'_2 de ces ions sont égales à 1. Il en est de même de leurs concentrations en équivalents qui sont égale à la concentration molaire de la solution; soit:

$$C'_1 = C(Na^+)\, v'_1 = C$$

$$\text{et} \quad C'_2 = C(Cl^-)\, v'_2 = C$$

La concentration molaire C de la solution de sel peut donc se déterminer, à partir de la force ionique, comme suit:

$$I = \frac{1}{2}\left[C'_1 v'^2_1 + C'_2 v'^2_2\right] = \frac{1}{2}(C + C) = 1$$

D'où: C=1 (M)

La concentration pondérale est alors:

$$C = \frac{m_{solute}}{V_{solvant}} = \frac{23\,(g) + 35,5\,(g)}{1\,(l)} = 58,5\,(g/l)$$

L'osmolarité de la solution est:

$$C = \frac{(N^{bre}\text{ de particules })_{solute}}{N_A}\frac{1}{V_{solvant}} = \left(\frac{N_1}{N_A}+\frac{N_2}{N_A}\right)\frac{1}{1\,(l)}$$

N_A, N_1 et N_2 sont, respectivement, le nombre d'Avogadro et les nombres d'ions Na^+ et Cl^-, contenus dans un litre de solution.

soit: $C = [1+1]\frac{1}{1\,(l)} = 2$ (osmoles)

Quant à la concentration en équivalent, elle vaut:

pour l'ion de Na^+: $C_1 = m(Na^+)\,v'_1 = 1\,(M)\,1 = 1\,(Eq)$

et pour l'ion de Cl^-: $C_2 = m(Cl^-)\,v'_2 = 1\,(M)\,1 = 1\,(Eq)$

$m(Na^+)$ et $m(Cl^-)$ sont, respectivement, les masses en ions gramme de Na+ et de Cl-.

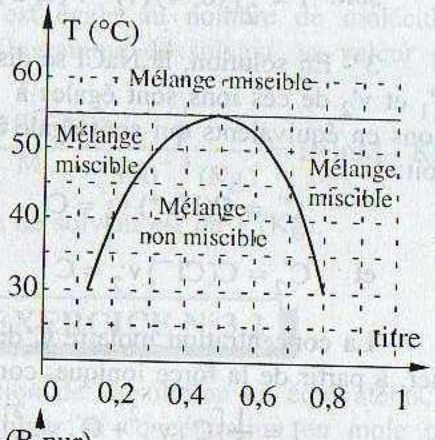
SOLUTION DE L'EXERCICE N°3.3

1°- Le titre de la solution est:

$$t = \frac{m_{sol}}{m_{sol}+m_{solv}} = \frac{0,5}{2,5} = 0,2$$

2°- Sur la Fig(1), ci-contre, le point représentatif de la solution (t=0,2,T=40°C) se trouve sur la courbe de miscibilité. Donc, la solution est homogène mais saturée.

3°- Si on abaisse sa température à 30 (°C), son point représentatif sur la Fig(1) se retrouve sous la courbes de miscibilté; c'est à dire :dans la région de non miscibilité. On aura alors



Fig(1)

deux phases: l'une contenant un mélange homogène et saturé de (A) et (B) et l'autre, constituée du soluté (A) seulement.

Si on élève la température de la solution à 45 (°C), son point représentatif sur le diagramme de la Fig(1) sera au dessus de la courbe de miscibilité; c'est à dire: dans la région de miscibilité. La solution sera donc homogène et non saturée.

Si on élève la température de la solution à 55 (°C), pour les mêmes raisons que précédemment, la solution sera également homogène et non saturée.

Donc, la solution est homogène à 40 (°C), à 45 (°C) et à 55 (°C). Cependant elle ne l'est pas à 30 (°C). Pour qu'elle le devient, il faudrait que son point représentatif sur la Fig(1) soit en dehors de la zone de non miscibilité. On doit donc rajouter du solvant (B) à la solution de manière à ramener son titre à environ 0,125. La quantité minimale x de solvant qu'il faudrait rajouter est alors:

$$0,125 = \frac{0,5\,(Kg)}{2\,(Kg) + x\,(Kg)}$$

soit: $$x = \frac{0,5\,(Kg)}{0,125} - 2\,(Kg) = 2\,(Kg)$$

Comme la masse volumique du solvant et de 0,9 (g/cm^3), le volume V_B de solvant qu'il faudrait rajouter à la solution est:

$$x = \rho_B V_B \Rightarrow V_B = \frac{x}{\rho_B}$$

soit: $$V_B = \frac{2\,(Kg)}{0,9\,10^3\,(Kg/m^3)} = 2,22\,10^{-3}\,(m^3) = 2,22\,(l)$$

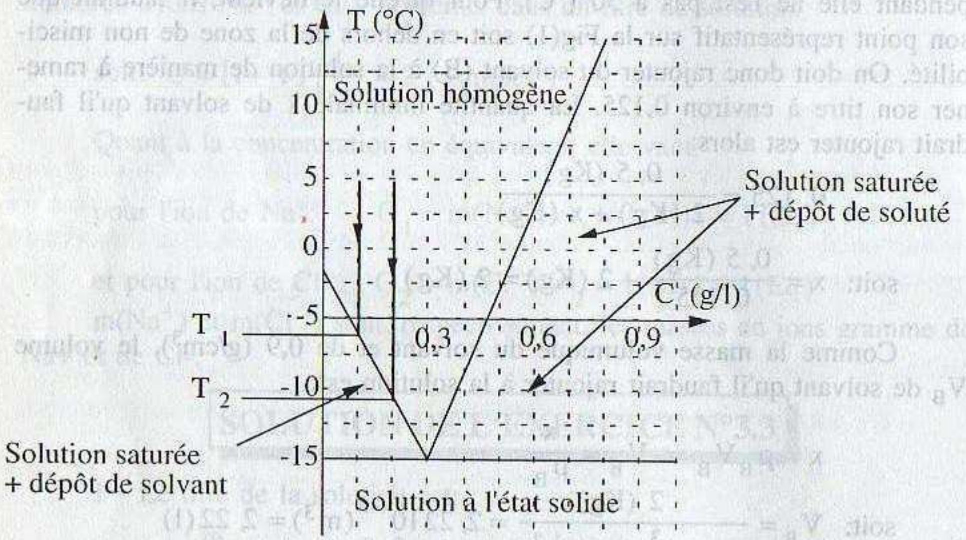
SOLUTION DE L'EXERCICE N°3.4

1°- La température de congélation du solvant peut être lue sur le diagramme d'équilibre de la solution Fig(2); elle correspond à la température d'équilibre d'une solution de concentration C=0 (g/l). Sa valeur est:

$$T_0 \approx -2\,(°C)$$

2°- Dans le rappel de cours, on avait vu que selon la concentration de la solution considérée, en refroidissant progressivement une solution homogène de A et B, il y avait apparition de cristaux: du soluté si $C>C_E$, du solvant si $C<C_E$ et de toute la solution si $C=C_E$. Donc, le refroidissement pro-

gressif des solutions de concentrations 0,1 (g/l) et 0,2 (g/l), inférieures C_E=0,3 (g/l), fera apparaître des cristaux de solvant. On peut donc déterminer la température de congélation du solvant dans ces solutions par simple lecture sur le diagramme de la Fig(2). En effet, en supposant que ces solutions sont à la température de 5 (°C), par exemple, en les refroidissement progressivement, leurs points représentatifs sur le diagramme se déplaceront sur les verticales, passant par C_1=0,1 (g/l) et C_2=0,2 (g/l). Les ordonnés des points d'intersections des verticales avec le diagramme d'équilibre de la solution seront les points de congélations du solvant dans ces solutions. Ainsi, les points de congélation du solvant dans les solutions de concentrations C_1 et C_2 sont, respectivement, T_1=-7,5 (°C) et T_2=-11 (°C).



Fig(2)

3°- Pour que la solution de concentration c=0,6 (g/l) reste homogène, il faudrait que son point représentatif, sur le diagramme de la Fig(2), soit tout le temps dans la région des solutions homogènes; c'est à dire que sa température doit être toujours supérieure ou égale à 3 (°C) environ.

4°- Quand la température de la solution de concentration 0,6 (g/l) baisse progressivement, son point représentatif, sur le diagramme de la Fig(2), décrit une trajectoire verticale. Aux températures -2 (°C) et -10 (°C), les points représentatifs de la solution sont dans la région "solution saturée avec dépôt de soluté". On a donc un dépôt solide du soluté et une solution saturée. Le dépôt à la température -10 (°C) est évidemment plus important

qu'à la température -2 (°C). A la température -16 (°C), le point représentatif de la solution est dans la région "solution à l'état solide" Fig(2). Donc, toute la solution (soluté et solvant) s'est cristallisée.

5°- Le point d'eutéxie de la solution est le point de passage de l'état liquide (solution homogène sans dépôt solide) à l'état solide (cristallisation de toute la solution). Sur le diagramme de la Fig(2), les coordonnées du point d'eutéxie sont: $C=C_E$=0,3 (g/l) et $T=T_E$=-15 (°C).

SOLUTION DE L'EXERCICE N°3.5

1°- Le titre et la concentration molaire de la solution de sucre sont:

$$t_1 = \frac{m_{sucre}}{m_{sucre} + m_{eau}} = \frac{0,1\,(g)}{0,1\,(g) + 1000\,(g)} \approx 10^{-4}$$

et $$C_1 = \frac{m_{sucre}}{M_{sucre}} \frac{1}{V_{eau}} = \frac{0,1(g)}{342\,(g)} \frac{1}{1(l)} = 292\,10^{-6} (M/l) = 292\ (\mu M)$$

Il en est de même pour la solution de sel; soit:

$$t_2 = \frac{m_{sel}}{m_{sel} + m_{eau}} = \frac{0,1\,(g)}{0,1\,(g) + 1000\,(g)} \approx 10^{-4}$$

et $$C_2 = \frac{m_{sel}}{M_{sel}} \frac{1}{V_{eau}} = \frac{0,1(g)}{58,5\,(g)} \frac{1}{1(l)} \approx 1,71\,10^{-3} (M/l) = 1,71\ (mM$$

2°- Comme l'osmolarité C'_2 d'une solution ionique est définie par:

$$C'_2 = \left(\frac{N^{bre}\text{ de particules}}{N_A}\right)\left(\frac{1}{V_{solution}\ (l)}\right)$$

il faudrait donc déterminer, pour la solution de sel, le nombre d'ions Na^+ et Cl^-, contenus dans un litre de cette solution. Comme le NaCl en solution se dissocie en Na^+ et Cl^- et que la dissociation est supposée totale, les concentrations en ions gramme de Na^+ et de Cl^- sont égales à celle de la solution. Les nombres N_1 d'ions Na^+ et N_2 d'ions Cl^-, contenus dans le litre de solution, sont donc:

$$N_1 = N_2 = 1,71\,10^{-3}\,N_A \Rightarrow \frac{N_1}{N_A} = \frac{N_2}{N_A} = 1,71\,10^{-3}$$

D'où l'osmolarité C'_2 de la solution.

$$C'_2 = \left(\frac{N_1}{N_A} + \frac{N_2}{N_A}\right)\frac{1}{1(l)} = 3,42\,10^{-3}\ (\text{osmoles})$$

La force ionique I de la solution de sel est:

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{N_1}{N_A}v_1^2 + \frac{N_2}{N_A}v_2^2\right) = \frac{1}{2}\left[1,71\,10^{-3}(1)^2 + 1,71\,10^{-3}(1)^2\right] = 1,71\,10^{-3}$$

Les valences v_1 et v_2 des ions Na^+ et Cl^- sont évidemment égales à l'unité.

3°- les points de congélation T_1 et T_2 de l'eau dans les solutions, respectivement, de sucre et de sel, peuvent se déterminer par la 2°loi de Raoult pour la cryoscopie; soit:

$$T_0 - T_1 = k'_c \frac{C}{M_{sucre}} \quad \text{avec} \quad C = \frac{m_{sucre}}{m_{eau}} = \frac{0,1\ (g)}{1000\ (g)} = 10^{-4}$$

$$\text{et} \quad T_0 - T_2 = i\,k'_c \frac{C}{M_{sel}}, \quad i = 2 \ \text{(solution électrolyte)}$$

T_0 étant le point de congélation de l'eau pure. A la pression atmosphérique normale (P_{air}=1 (atm)), sa valeur est de 0 (°C).

A la pression atmosphérique normale, les points de congélation de l'eau en solution sont donc:

- dans la solution de sucre:

$$0 - T_1 = 1850\,\frac{10^{-4}}{342} \approx 5,4\,10^{-4}\,(°C)$$

soit: $T_1 \approx -5,4\,10^{-4}\,(°C)$

- dans la solution de sel:

$$0 - T_2 = 2(1850)\,\frac{10^{-4}}{58,5} \approx 63,25\,10^{-4}\,(°C) \Rightarrow T_2 \approx -63,25\,10^{-4}\,(°C)$$

SOLUTION DE L'EXERCICE N°3.6

1°- La pression osmotique est la pression qui s'oppose à l'entrée de l'eau dans le tube; c'est donc la pression en un point A de la solution, se trouvant dans le voisinage immédiat de la membrane.

Sur la Fig(3) et à l'équilibre, les pressions aux points A et B sont égales (A et B appartiennent à la solution et sont dans un même plan horizontal). Donc, la pression osmotique p de la solution est:

$$p = P_A = P_B$$

Comme le point B appartient également au mercure, on peut déterminer la valeur de la pression en B au moyen de la loi fondamentale de l'hydrostatique; soit:

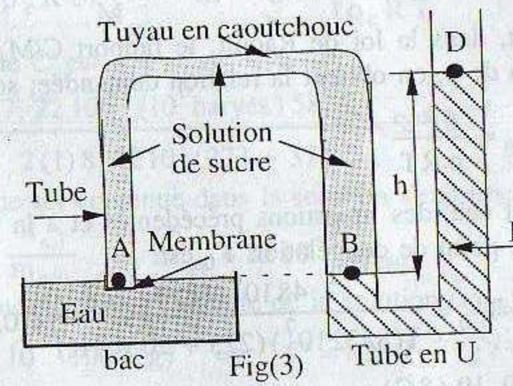
$$P_B - P_D = \rho_{Hg}\,g\,h \quad \Rightarrow \quad P_B = \rho_{Hg}\,g\,h + P_D$$

Comme p=P_B et que la pression en D est celle de l'air atmosphérique P_D=P_0=1 (atm), la pression osmotique de la solution de sucre vaut:

$$p = \rho_{Hg}\,g\,h + P_0$$

soit: $p = 13,6\,10^3 (Kg/m^3)\,9,8(m/s^2)\,1,10(m) + 1,02\,10^5\,(N/m^2)$

c'est à dire: $p \approx 2,48\,10^5\,(N/m^2) = 2,48\ (atm)$



Fig(3)

2°- La concentration C de la solution peut se déterminer par la loi de Van't Hoff; soit:

$$p = \rho_e R T \frac{C}{M_{sucre}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{p}{\rho_e R T} M_{sucre}$$

Comme dans la pratique, les masses sont souvent exprimées en gramme, il est donc préférable d'utiliser le système CGS. Dans ce dernier, la constante des gaz parfaits vaut R=8,32 10^7 et la pression s'exprime en baryes (10^6 baryes=1 (atm)). La valeur de C est alors:

$$C = \frac{2,48\,10^6\ (baryes)}{1(g/cm^3)\,8,32\,10^7\,(273+20)\,(°K)}\,342\ (g) \approx 34,79\,10^{-3}$$

La masse de sucre contenue dans la solution s'exprime comme suit:

$$C = \frac{m_{sucre}}{m_{eau}} \approx 34,79\,10^{-3} \quad \Rightarrow \quad m_{sucre} = 34,79\,10^{-3}\,m_{eau}$$

La valeur de la concentration pondérale est égale à la masse de sucre contenue dans un litre d'eau (m_{eau}=10^3 (g)); soit:

$$C = 34,79\ (g/l)$$

3°- L'expression, donnant l'abaissement du point de congélation du solvant en fonction de la pression osmotique, peut se déterminer à partir des lois de Raoult et de Van't Hoff. En effet, pour la solution considérée, ces lois s'écrivent comme suit:

$$T_0 - T'_0 = k'_c \frac{C}{M_{sucre}}$$

et $$p = \rho RT \frac{C}{M_{sucre}}$$

T_0 et ρ sont, respectivement, le point de congélation et la masse volumique du solvant pur.

En remplaçant, dans la loi de Raoult, le rapport C/M_{sucre} par son expression en fonction de p, on obtient la relation demandée; soit:

$$T_0 - T'_0 = \frac{p\, k'_c}{\rho RT}$$

Pour le solvant eau, des questions précédentes et à la pression atmosphérique normale, le point de congélation T'_0 est:

$$0(°C) - T'_0 = \frac{2,48\, 10^6 (1850)}{1(8,32\, 10^7)(273+20)(°K)} \approx 0,19\ (°C)$$

soit: $T'_0 \approx -0,19\ (°C)$

Remarque: Par la loi de Raoult; on peut vérifier la valeur du point de congélation du solvant (eau) en solution, obtenue ci-dessus; soit:

$$0(°C) - T'_0 = 1850\, \frac{34,79\, 10^{-3}}{342} \approx 0,19(°C) \Rightarrow T'_0 \approx -0,19(°C)$$

SOLUTION DE L'EXERCICE N°3.7

1°- La pression osmotique p de la solution se détermine, comme précédemment, par la loi de Van't Hoff; soit:

$$p = i \rho_e RT \frac{C}{M_{sel}}$$

Comme l'ionisation de la solution est totale, le coefficient i est égal à deux ($NaCl \longrightarrow Na^+ + Cl^-$). Quant à la concentration C, elle vaut:

$$C = 2,8\, 10^{-3} (M/l) = \frac{2,8\, 10^{-3}(23+35,5)(g)}{1000\ (g)} \approx 164\, 10^{-6}$$

La pression osmotique de la solution est donc:

$$p = 2\,(1)\,(8,32\, 10^7)(273+37)\frac{164\, 10^{-6}}{58,5}$$

soit: $p \approx 144\, 10^3 (\text{baryes}) = 144\, 10^{-3}\ (\text{atm})$

2.1- Comme on connaît la pression osmotique p' de la solution, on peut donc déterminer, à partir de la loi de van't Hoff, l''expression qui donne sa concentration C' ; soit:

$$p' = i \rho_e RT \frac{C'}{M_{sel}} \quad \Rightarrow \quad C' = \frac{p' M_{sel}}{i \rho_e RT}$$

La valeur de C' est.

$$C' = \frac{7,22\, 10^{-2}(10^6 \text{baryes})\, 58,5}{2\,(1)\, 8,32\, 10^7 (273+37)} \approx 82\, 10^{-6}$$

La masse de sel contenue dans la solution s'exprime comme suit:

$$C' = \frac{m_{sel}}{m_{eau}} \quad \Rightarrow m_{sel} \approx 82\, 10^{-6}\, m_{eau}$$

D'où la concentration pondérale de la solution (m_{eau}=1000 (g)):

$$m_{sel} \approx 82\, 10^{-6}\, 1000\,(g) \quad \Rightarrow \quad C' = 82\, 10^{-3}\ (g/l) = 82\ (mg/l)$$

2.2- Le sac est une membrane semi-perméable qui sépare les deux solutions de sel. Comme la pression osmotique de la solution du récipient est inférieure à celle de la solution du sac, le solvant eau réagira de manière à les équilibrer; il y aura donc endosmose de l'eau dans le sac. La diminution de la concentration qui en résulte, entraînera une une baisse de la pression osmotique dans le sac; le phénomène s'arrêtera quand cette dernière deviendra égale à celle du récipient.

2.3- A l'équilibre, les solutions de sel sont isotoniques; leurs concentrations sont donc égales. Comme le volume de solvant dans le récipient est très grand devant le volume maximum du sac, la diminution du solvant dans le récipient, suite à son endosmose dans le sac, n'influera pas sur la valeur de la concentration de la solution du récipient. Les concentrations des solutions sont donc égales à $82 10^{-3}$ (g/l).

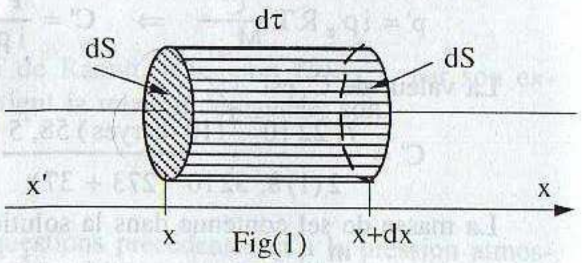
Remarque: si le volume de solvant nécessaire à la solution du sac pour avoir une concentration de $82 10^{-3}$ (g/l) est supérieur au volume maximum du sac, l'endosmose provoquera son éclatement.

SOLUTION DE L'EXERCICE N°3.8

En raison des dimensions du tuyau (S= 0,5 (cm^2) et L=80 (cm)), dans cet exercice, on supposera la diffusion des molécules de (A) dans (B), unidirectionnelle.

1°- Suivant la direction x'x de l'axe du tuyau, considérons un volume cylindrique dτ élémentaire, de surface de base dS et de hauteur dx Fig(1).

Si n(x,t) est la densité volumique des molécules de (A), à l'instant t et en un point de la section droite du tuyau d'abscisse x, la variation du nombre de molécules dans dτ durant un intervalle de temps dt sera:



Fig(1)

$$d[n(x,t)\,d\tau] = (J_n)_{x+dx}\,dS\,dt - (J_n)_x\,dS\,dt$$

où: $(J_n)_x dSdt$ et $(J_n)_{x+dx} dSdt$ sont, respectivement, les quantités de molécules de (A) rentrant et sortant de dτ , durant l'intervalle de temps dt.

$$\text{soit: } dn(x,t)\,dS\,dx = [(J_n)_{x+dx} - (J_n)_x]\,dS\,dt \qquad (1)$$

Comme n et $(J_n)_x$ sont des fonctions de plusieurs variables, leur variation élémentaire s'exprime comme suit:

$$dn(x,t) = n(x,t+dt) - n(x,t) = \frac{\partial n(x,t)}{\partial t}dt$$

$$\text{et} \quad d(J_n)_x = (J_n)_{x+dx} - (J_n)_x = \frac{\partial (J_n)_x}{\partial x}dx$$

L'équation (1) peut donc s'écrire comme suit:

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial (J_n)_x}{\partial x} \qquad (2)$$

Comme la loi de Fick s'écrit:

$$(J_n)_x = -D\frac{\partial n(x,t)}{\partial x}$$

En supposant D indépendant de x et en remplaçant dans l'équation (2) $(J_n)_x$ par son expression, on obtient l'équation de diffusion de la substance (A) dans le solvant (B); soit:

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -D\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} \qquad (3)$$

En multipliant les deux membres de l'équation (3) par $\dfrac{M_A}{N_A\tau_0}$, on obtient:

$$\frac{\partial\left(\frac{n(x,t)M_A}{N_A\tau_0}\right)}{\partial t} = -D\frac{\partial^2\left(\frac{n(x,t)M_A}{N_A\tau_0}\right)}{\partial x^2}$$

où: M_A, N_A et τ_0 sont, respectivement, la masse molaire de la substance (A), le nombre d'Avogadro et un volume unitaire (1litre).

$$\text{soit: } \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = -D\frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2}$$

C(x,t) étant la concentration pondérale, à l'instant t, de la solution (A+B) dans la section droite du tube d'abscisse x.

2°- En régime permanent, les concentrations pondérales de la solution ne dépendent plus du temps (C(x,t)=C(x)). Il s'en suit que le premier membre de l'équation de diffusion est nul. On a donc:

$$0 = -D\frac{\partial^2 C(x)}{\partial x^2} \;\Rightarrow\; \frac{\partial C(x)}{\partial x} = A_1 = \text{Cte}$$

$$\text{soit: } C(x) = A_1 x + B_1$$

Les constantes d'intégration A_1 et B_1 se déterminent par les conditions aux limites suivantes: en x=0, C=C_0 et en x= L, la masse de (A), absorbée par seconde et par unité de surface, est $\mathring{m}_s$. On a donc:

$$C_0 = B_1$$

$$\text{et} \quad \mathring{m}_s = -D\left(\frac{\partial C(x)}{\partial x}\right)_{x=L} = -DA_1 \;\Rightarrow\; A_1 = -\frac{\mathring{m}_s}{D}$$

La solution de l'équation de diffusion est alors:

$$C(x) = -\frac{\mathring{m}_s}{D}x + C_0$$

3°- La masse m_A de la substance (A) absorbée par seconde est:

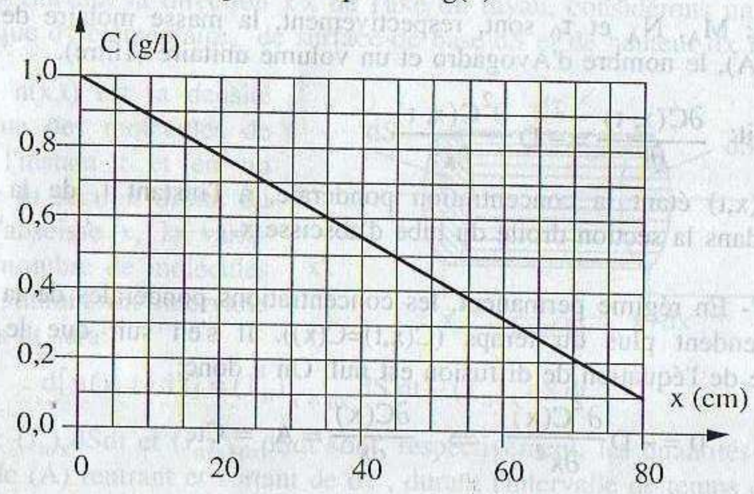
$$m_A = \mathring{m}_s S$$

$$\text{soit: } m_A = \frac{DS}{x}(C_0 - C(x)) = \frac{DS}{L}(C_0 - C_L) = 0,9\,C_0\frac{DS}{L}$$

$$\text{A.N:}\quad m_A = 0{,}9\ 1\left(\frac{g}{10^3\,cm^3}\right)\frac{0{,}52\,10^{-5}(cm^2s^{-1})\,0{,}5\,(cm^2)}{80\,(cm)}$$

$$\text{soit:}\quad m_A \approx 292\ 10^{-12}\ (g/s) = 292\ \ (pg/s)$$

4°- La courbe, donnant la variation de la concentration de la solution le long du tuyau, est celle représentée par la Fig(2).



Fig(2)

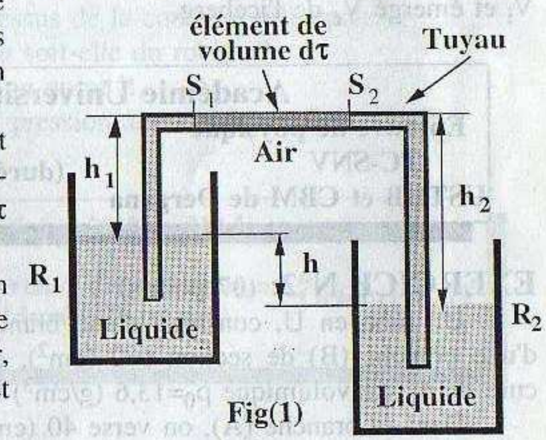
Les sujets d'examens comportent, souvent, plusieurs parties: optique, rayonnements (électromagnétique et particulaire), mécanique des fluides (hydrostatique, hydrodynamique et solutions binaires) et électricité. Dans ce recueil, on a reproduit que la partie mécanique des fluides, bien sûr. Pour le temps alloué, il est proportionnel à la note attribuée à la partie mécanique des fluides.

USTHB Institut de physique TC-Biologie	Epreuve de synthèse (durée 2h.00 mn)	Juin 1998

EXERCICE N°4: Hydrostatique (04 points)

On considère deux réservoirs, contenant un même liquide, et un tuyau de section S, rempli également du même liquide et dont les extrémités sont bouchées. Après introduction de ces dernières dans les liquides des réservoirs R_1 et R_2 Fig(1), on supprime leurs bouchons.

Sur la Fig(1), S_1 et S_2 sont deux sections droites du tube, délimitant l'élément de volume $d\tau$ du liquide.



Fig(1)

1°- En supposant la pression du liquide constante dans chaque section droite du tube, déterminer, en fonction de h_1, de h_2 de P_0 et de ρ, les pressions en S_1 et S_2.

2°- Calculer la résultante des forces de pression s'exerçant sur l'élément liquide.

3°- En déduire du 2° le sens de l'écoulement du liquide.

P_0 et ρ sont, respectivement, la pression de l'air atmosphérique et la masse volumique du liquide.

2°- Calculer la résultante des forces de pression s'exerçant sur l'élément liquide.

3°- En déduire du 2° le sens de l'écoulement du liquide.

P_0 et ρ sont, respectivement, la pression de l'air atmosphérique et la masse volumique du liquide.

U S T H B **Institut de physique** **TC-Biologie**	**Epreuve de rattrapage** **(durée 2h.00 mn)**	**Septembre1998**

EXERCICE N°4: Hydrostatique (03)

Un iceberg est un énorme bloc de glace qui est détaché d'une banquise.

On considère un iceberg de volume V_0 qui flotte sur l'eau de mer. Les masses volumiques de l'air, de la glace et de l'eau de mer valent respectivement 1,3 (g/l), 0,92 (g/cm^3) et 1,03 (g/cm^3).

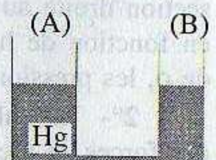
1°- Exprimer, en fonction de V_0 et du volume immergé V_i, la force de poussée d'Archimède qui s'exerce sur l'iceberg.

2°- Déterminer la valeur numérique du rapport des volumes immergé V_i et émergé V_e de l'iceberg.

Académie Universitaire d'Alger		
Epreuve de physique **TC-SNV** **USTHB et CBM de Dergana**	**1° EMD** **(durée 2h.00 mn)**	**Mai 1999**

EXERCICE N°2: (07 points)

Un tube en U, constitué d'une branche (A) de section S=4 (cm^2), et d'une branche (B) de section s=2 (cm^2), contient du mercure de masse volumique ρ_0=13,6 (g/cm^3) Cf. Figure.



Dans la branche (A), on verse 40 (cm^3) d'eau et dans la branche (B) 60 (cm^3). La masse volumique de l'eau est ρ_e=1 (g/cm^3).

1°- Calculer les hauteur h_a et h_b des colonnes d'eau dans les branches (A) et (B).

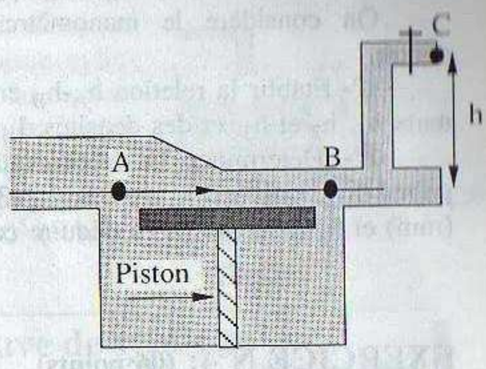
2°- Calculer la dénivellation h entre les deux niveaux de mercure et celle h' entre les surfaces libres de l'eau dans les deux branches.

3°- Quel volume d'huile, de masse volumique ρ'=0,8 (g/cm^3), doit-on verser dans la branche (A) pour que les surfaces libres, de l'eau et de l'huile dans les branches (A) et (B), soient dans un même plan horizontal.

EXERCICE N°3: (06 points)

Une conduite d'approvisionnement en eau, en écoulement permanent et

de viscosité négligeable, d'un édifice passe d'un diamètre de 4 (cm) en A à 2 (cm) en B.



1°- La conduite est horizontale et la vitesse de l'écoulement en B est de 3 (m/s).

a) - Calculer la vitesse de l'écoulement en A.

b) - Calculer la différence de pression entre les points A et B.

c) - Déterminer l'intensité de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le piston de diamètre 40 (cm) Cf. Figure.

2°- En aval de la section B, on installe un robinet de diamètre 1 (cm), situé à une hauteur h=2 (m) au dessus de la conduite principale.

a) - A quelle vitesse l'eau sort-elle du robinet?

b) - Calculer la pression au point B.

On donne g=10 (m/s^2) et la pression atmosphérique P0=10^5 (Pa).

Académie Universitaire d'Alger		
Epreuve de physique **TC-SNV** **Université de Blida**	**Epreuve de rattrapage** **(durée 2h.00 mn)**	**Octobre 1999**

EXERCICE N°1: (02 points)

Calculer en Pascal (Pa) et en atmosphère (atm) les pression exercées par les colonnes de liquides suivantes: 100 (m) d'eau et 10 (cm) d'alcool. les densités de l'eau et de l'alcool sont, respectivement, de 1 et de 0,8.

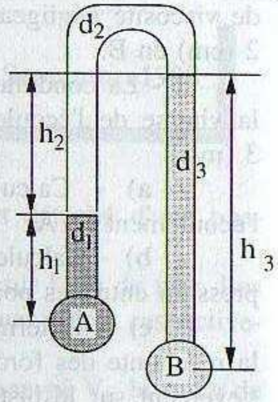
EXERCICE N°2: (02 points)

Pascal refait l'expérience de Torricelli sur une plate forme haute de 52 (m) au dessus du sol.

Quelle variation de la hauteur de la colonne de mercure pouvait-il espérer observer? On rappelle que Torricelli constata que la hauteur de la colonne de mercure diminue de 85 (mm) pour une altitude de 1000 (m).

EXERCICE N°3: (03 points)

On considère le manomètre de la figure ci-contre.



1°- Etablir la relation h_A-h_B en fonction des hauteurs h_1, h_2 et h_3, et des densités d_1, d_2 et d_3.

2°- Déterminer la valeur numérique de h_A-h_B pour: d_1=d3=d (eau), d_2=0,8, h_1=300 (mm), h_2=200 (mm) et h_3=600 (mm); en déduire celle de P_A-P_B.

EXERCICE N°4: (06 points)

Le rayon intérieur d'une grosse artère d'un caniche est de 4 (mm), le débit du sang à travers l'artère est de 1 (cm^3/s). A 37(°C), la viscosité dynamique du sang est de 2,085 10^{-3} Poiseuille et sa masse volumique est de 1,0595 10^3 (Kg/m^3).

1°- Déterminer la vitesse moyenne du sang dans cette artère.

2°- Trouver la chute de pression le long de l'artère sur une longueur de 10 (cm)

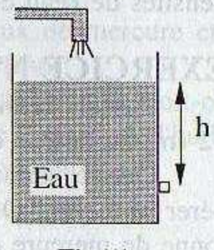
3°- Quelle est la puissance requise pour entretenir l'écoulement sanguin dans l'artère du chien?

4°- Trouver le nombre de Reynolds et déterminer si l'écoulement est bien laminaire.

U S T H B **Fac. des sciences de physique** **TC-Biologie**	**2° EMD** **(durée 2h.00 mn)**	**5 Juin 2000**

EXERCICE N°1: (07 points)

L'eau d'un grand réservoir, dont le niveau est maintenu constant, s'écoule à travers un petit orifice de diamètre D=2 (cm) Fig(1). La dénivellation entre l'orifice et la surface libre du réservoir est h=1,25 (m).



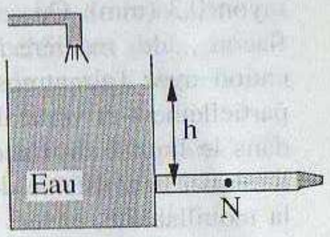
Fig(1)

On considère l'eau comme un fluide parfait et incompressible ρ=1 (g/cm^3).

1°- Calculer la vitesse et le débit volumique de l'écoulement à la sortie de l'orifice. On prendra g=10 (m/s^2).

2°- Au bout de combien de temps, le volume d'eau recueilli dans un récipient, à la sortie de l'orifice, sera-t-il de 157 (l)?

3°- Le réservoir précédent sert à alimenter une lance d'arrosage horizontale, de forme cylindrique et de diamètre D=2 (cm). Cette lance d'arrosage est munie, à sa sortie, d'une tuyère circulaire de diamètre d=1 (cm) Fig(2). Calculer au point N de la Fig(2) la vitesse et la pression de l'eau. La pression atmosphérique Vaut 10^5 (N/m^2).



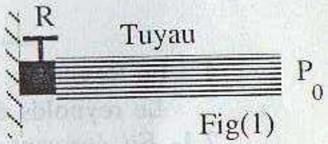
Fig(2)

U S T H B **Fac. des sciences de physique** **TC-Biologie**	**Epreuve de synthèse** **(durée 2h.00 mn)**	**20 Juin 2000**

Mécanique des fluides: (06 points)

(Toutes les questions sont indépendantes).

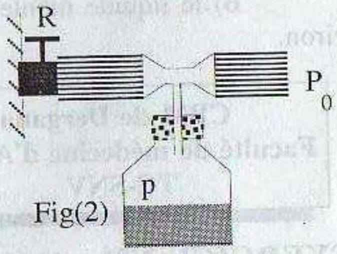
Une conduite horizontale, de forme circulaire et de rayon interne r=1,5 (cm), est branchée à un robinet d'eau Fig(1). Quand on ouvre à fond le robinet R, on s'aperçoit, quelques secondes après, que le débit de la conduite est constant et vaut 3 (l/mn). La masse volumique et le coefficient de viscosité dynamique de l'eau sont, respectivement, 1 (g/cm3) et 1,14 10^{-2} poise.



Fig(1)

1°- Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement puis, en déduire sa nature.

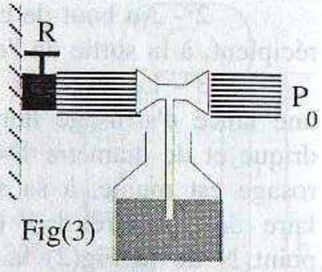
2°- On ferme le robinet R et on place place, au milieu de la conduite, un tube de venturi comme indiqué sur la Fig(2). En ouvrant, de nouveau et à fond, le robinet R, on s'aperçoit que le débit d'eau de la conduite n' a pas changé (3 (l/mn)).



Fig(2)

2.1- La partie rétrécie, de rayon 7,5 (mm), est mise en communication avec un flacon fermé. L'eau de la conduite ne pénètre pas dans le flacon et la pression atmosphérique est P_0=10^5 (N/m^2). Montrer que la pression p à l'intérieur du flacon fermé est telle que: (P_0 - p)=37,6 (N/m^2).

2.2- Le tuyau de communication avec le venturi est en fait un tube capillaire de rayon 0,3 (mm). On enlève le bouchon du flacon , de manière à le mettre en communication avec l'air atmosphérique, et on plonge, partiellement et verticalement, le tube capillaire dans le liquide du flacon Fig(3). La masse volumique, la constante de tension superficielle et la mouillabilité, envers le tube capillaire, du liquide du flacon sont, respectivement, ρ_0=1,2 (g/cm^3), $72\,10^{-3}$ (N/m) et 60°. Quelle est la dénivellation et le sens de déplacement du liquide dans le capillaire:



Fig(3)

a) - Quand le robinet est fermé; c'est à dire que la pression à l'intérieur de la conduite est égale à la pression atmosphérique?

b) - Lorsque le robinet est ouvert comme précédemment.; c'est à dire avec un débit de 3 (l/mn).

On supposera que l'eau de la conduite ne pénètre pas dans le tube capillaire et on prendra g=10 (m/s^2).

REPONSES

1°- Le Reynolds vaut 1862 environ.

Le reynolds étant inférieur à 2300, l'écoulement est laminaire.

2.1- En écrivant l'équation de Bernoulli et l'équation de conservation de débit volumique dans les sections du venturi et de sortie du tuyau, on déduit la différence de pression donnée.

2.2:

a) Le liquide monte dans le capillaire d'une hauteur de 20 (mm).

b) le liquide monte dans le capillaire d'une hauteur de 23 (mm) environ.

CBM de Dergana Faculté de médecine d'Alger TC-SNV	EPREUVE DE SYNTHÈSE (durée 2h.00 mn)	Juin 2000

EXERCICE N°1: (03 points)

Un récipient contient de l'eau de masse volumique ρ=1 (g/cm^3).

1°- Un bloc de bois (ρ_b=0,6 (g/cm^3), de masse M_b=90 (g) est lesté par un bloc de plomb ρ_p=11,3 (g/cm^3), flotte sur l'eau. Le 1/5 du volume de

l'ensemble bois-plomb reste émergé; calculer la masse du bloc de plomb.

2°- On enlève l'ensemble bois plomb et on plonge un tube capillaire dans l'eau. Le mouillement étant parfait, écrire l'expression de la hauteur capillaire h en fonction du rayon r du capillaire, de l'accélération de la gravitation g, de la masse volumique ρ et de la constante de tension superficielle de l'eau σ.

calculer le rayon r du capillaire si la hauteur h vaut 146 (mm). On donne la constante de tension superficielle de l'eau σ=0,073 (N/m).

EXERCICE N°2: (03 points)

Un fluide de viscosité dynamique η=0,123 Poiseuille et de masse volumique ρ=850 (kg/m^3) circule dans une conduite horizontale de longueur 300 (m) et de diamètre d=20 (cm). Le débit volumique est de 35 (l/s).

1°- Calculer la vitesse de l'écoulement et le nombre de Reynolds. Préciser la nature de cet écoulement.

2°- Quel doit être le diamètre limite du tuyau pour que l'écoulement reste laminaire (Rc≤2000) si le débit volumique du fluide est de 35 (l/s).

3°- Calculer la perte de charge ΔP qui se produit sur la longueur. L=300 (m) de la conduite de diamètre d=20 (cm).

4- PHYSIQUE:

I- Mécanique des Fluides:

1 - Hydrostatique:

1.1 - Introduction

1.2- Notion de pression

1.3- Lois de l'hydrostatique

1.4- Applications :

1.4.1- Vases communicants (principe)

1.4.2- Théorème de Pascal (presse hydraulique)

1.4.3- Flottabilité (principe d'Archimède)

1.4.4- Mesure de pression (baromètres)

1.5- Tension superficielle - Phénomène de capillarité

1.5.1- Force de tension superficielle: (origine, mise en évidence et loi de force)

1.5.2- Contact d'un liquide avec un solide et un gaz - mouillabilité.

1.5.3- Applications : pression complémentaire, pression à l'intérieur d'une bulle de liquide, embolie capillaire, stalagmométrie et loi de Jurin.

2- Hydrodynamique.

2.1 Fluide Partait:

2.1.1- Cinématique : (ligne de courant, tube de courant et loi de conservation de la masse et de débit volumique).

2.1.2- Dynamique:(équation de Bernoulli)

Applications:

- phénomène de venturi.
- mesure de vitesses d'écoulement (tubes de Pitot)
- vitesse d'écoulement à travers un orifice.

2.2- Fluide Réel :

2.2.1- Définition, adhérence, couche limite dynamique, perte de charge, écoulement dans une canalisation et régime établi.

2.2.2- Ecoulements laminaire et turbulent.

2.2-3- Nombre de Reynolds et son influence sur le régime d'écoulement

2.2.4- Force de viscosité et coefficients de viscosité (dynamique et cinématique).

2.2-5 Ecoulement dans un tube - loi de Poiseuille

2.2.6- Mesure des coefficients de viscosité - viscosimètre à écoulement et à entraînement

2.2-7 Résistance au mouvement d'un fluide.

2.3- Etude de la solution binaire:

2.3.1- Définitions : Solution binaire, concentrations pondérale, molaire, molale, fraction molaire, osmolarité, osmolalité et concentration équivalente.

2.3.2- Solution liquide - liquide (miscibilité).

2.3.3-Solution d'un solide dans un liquide (solubilité, saturation et chaleur de dissociation).

2.3.4- Cristallisation d'une solution par refroidissement

2.3.5-Cryoscopie (loi de Raoult - détermination des masses molaires)

2.3.6- Ebullioscopie.

2.3.7- Diffusion en phase liquide (loi de Fick)

2.3.8- Diffusion à travers une membrane (osmose, dialyse, paroi-semi perméable, pression osmotique loi de Van-t-Hoff et tonicité des solutions.

II- Oudes sonores et ultrasons

1- Définition et caractérisation de l'onde sonore.

2- Propriétés, production et réception des ultrasons.

3- Application en biologie et en médecine.

III- Optique :

1 - Introduction : Vibration lumineuse, intensité lumineuse, rayon lumineux, phénomènes d'interférences et de diffraction

2- Principes de l'optique Géométrique : Principe de Fermat, principe de propagation rectiligne de la lumière, dioptres, comportement d'un rayon lumineux sur un dioptres (rayons, incident, réfléchi et réfracté), lois de Snell-Descartes, système optique (notion d'objet et d'image) et stigmatisme).

3- Eléments de l'optique géométrique: miroir plan, dioptre plan, lame à faces parallèles, prisme, dioptre sphérique et lentilles sphériques

4-Instruments d'optique: l'oeil, la loupe, la loupe composée, le microscope et techniques de visualisation sur un microscope (utilisation des colorants et du contraste de phase).

IV- Rayonnements.

1- Rayonnement électromagnétique : (définition, onde plane et ses caractéristiques, aspect corpusculaire, dualité onde- corpuscule et spectre des ondes électromagnétiques.

2- Rayonnement particulaire: (définition, postulats et résultats de la mécanique relativiste, mise en défaut de la mécanique newtonienne et dualité particule - onde.

3- Energie d'un rayonnement - spectre d'énergie: (source, densité spectrale, intensité d'un rayonnement spectre d'un REM (spectres de raies et continu) et spectre d'un Rayonnement particulaire.

4-Détection d'un rayonnement: (cellule photoémissive, photomultiplicateur et chambre d'ionisation (compteur Geiger Muller) etc.

5- Rayonnement X : (définition, production, spectres, notions de physique atomique, rendement du tube de Coolidge et propriétés des RX)

6- Rayonnement radioactif : (définition, noyau atomique, composition, défaut de masse, énergie de liaison, stabilité et réactions nucléaires, radioactivité alpha, bêta et capture électronique: réactions isomériques, loi de la décroissance radioactive, période, durée de vie, activité d'une substance, équilibre radioactif, radioactivité naturelle (famille radioactive), radioactivité artificielle (radioéléments) et applications.

7- Interaction avec la matière :

7.1- Cas du R.E.M : effets Compton et photoélectrique, matérialisation et annihilation, atténuation dans un milieu matériel (couche de demi atténuation :CDA et libre parcours moyen : LPM).

7.2- Cas du RP : interaction avec les cortèges électronique des atomes et avec les noyaux atomiques - paramètres d'absorption d'un milieu matériel (Transfert Linéique d'Energie : TLE et Densité Linéique d'Ionisation :DLI)

8- Radioprotection et dosimétrie.

8.1- Effets biologiques des rayonnements, dangers et action thérapeutique

8.2- Dosimétrie : unités d'exposition : le roëntgen, le rad et le rem .

8.3- Radioprotection.

V- Electricité:

1 - Electrostatique

1.1 - Phénomène d'électrisation, chargé électrique, charge ponctuelle et loi de Coulomb.

1.2- Champ et potentiel électriques créés par une charge électrique - espace électrique.

1.3- Energie potentielle électrique d'une charge ponctuelle placée dans un espace électrique

1.4-Dipôle électrique (définition, moment dipolaire, champ et potentiel électriques E et V créés en un point de l'espace, énergie potentielle électrique d'un dipôle dans un espace électrique et couple de forces électriques s'exerçant sur lui)

1.5-Conducteur électrique (définition, charge , densité surfacique de charge , champ et potentiel électriques , capacité propre, énergie interne et propriétés , pouvoir des pointes).

1.6- Phénomène d'influence - condensateur (définition, ddp, charge, capacité énergie, association de condensateurs - condensateur équivalent)

2- Electrocinétique

2.1- Rupture d'équilibre entre deux conducteurs - courant électrique.

2.2- Courant permanent - générateur.

2.3- Loi d'Ohm , résistance et association de résistances.

2.4- Loi de Joule

2.5- Générateur et récepteur électriques ,

2.6- Association de générateurs et de récepteurs électriques- lois de Kirchoff.

3- Magnétostatique

3.1- Aimant - champ magnétique.

3.2- Analogie aimant - bobine

3.3- Champ magnétique produit par un courant - loi de Biot et Savart et applications (fil, spire et bobine).

3.4- Action d'un champ magnétique sur une charge en mouvement et sur un courant - moment magnétique.

ANNEXE

TABLEAU PERIODIQUE DES ELEMENTS

1 H																	2 He
3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 A
19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ca	33 Ca	34 Ca	35 Ca	36 Ca
37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
55 Cs	56 Ba		72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
87 Fr	88 Ra																

57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lw

Eléments transuraniens

Les noms des 92 premiers éléments et leur masses atomiques sont donnés en page 2 de cette annexe.

Les noms des éléments transuraniens sont: Néptunium (Np), Plutonium (Pu), Américium (Am), Curium (Cm), Berkelium (Bk) Californium (Cf), Einsteinium (Es), Fermium (Fm) Mendelevium, Nobelium (No) et Lawrentium (Lw).

Noms	Symboles	Masses atomiques	Noms	Symboles	Masses atomiques
Actinium	Ac	227	Molybdène	Mo	95,9
Aluminium	Al	27	Néodyme	Nd	144,2
Antimoine	Sb	121,8	Néon	Ne	20,2
Argent	Ag	107,9	Nickel	Ni	58,7
Argon	A	39,9	Niobium	Nb	92,9
Arsenic	As	74,9	Or	Au	197
Astate	At	210	Osmium	Os	90,2
Azote	N	14	Oxygène	O	16
Baryum	Ba	137,3	Palladium	Pd	106,4
Béryllium	Be	9	Phosphore	P	31
Bismuth	Bi	209	Platine	Pt	195,1
Bore	B	10,8	Plomb	Pb	207,2
Brome	Br	79,9	Polonium	Po	210
Cadmium	Cd	112,4	Potassium	K	39,1
Calcium	Ca	40,1	Praséodyme	Pr	140,9
Carbone	C	12	Prométhium	Pm	145
Cérium	Ce	140,1	Protactinium	Pa	231
Césium	Cs	132,9	Radium	Ra	226
Chlore	Cl	35,5	Radon	Rn	222
Chrome	Cr	52	Rhénium	Re	186,2
Cobalt	Co	58,9	Rhodium	Rh	102,9
Cuivre	Cu	63,5	Rubidium	Rb	85,5
Dysprosium	Dy	162,5	Ruthénium	Ru	101,1
Erbium	Er	167,3	Samarium	Sm	150,4
Etain	Sn	118,7	Scandium	Sc	45
Europium	Eu	152	Sélénium	Se	79
Fer	Fe	55,8	Silicium	Si	28,1
Fluor	F	19	Sodium	Na	23
Francium	Fr	223	Soufre	S	32,1
Gadolinium	Gd	157,3	Strontium	Sr	87,6
Gallium	Ga	69,7	Tantale	Ta	180,9
Germanium	Ge	72,6	Technétium	Tc	99
Hafnium	Hf	178,5	Tellure	Te	127,6
Hélium	He	4	Terbium	Tb	158,9
He	Ho	164,9	Thallium	Tl	204,4
Holmium	H	1	Thorium	Th	232
Hydrogène	In	114,8	Thulium	Tm	168,9
Indium	I	126,9	Titane	Ti	47,9
Iode	Ir	192,2	Tungstène	W	183,9
Iridium	Kr	83,8	Uranium	U	238
Krypton	La	138,9	Vanadium	V	50,9
Lanthane	Li	6,9	Xénon	Xe	131,3
Lithium	Lu	175	Ytterbium	Yb	173
Lutécium	Mg	24,3	Yttrium	Y	88,9
Magnésium	Mn	54,9	Zinc	Zn	65,4
Manganèse	Hg	200,6	Zirconium	Zr	91,2